

## Минимаксные задачи в тригонометрии

В настоящем листке рассматриваются уравнения и неравенства, для решения которых используются оценки правой и левой частей. Чтобы стало понятно, о каких задачах идёт речь, начнём с совсем простого примера.

ЗАДАЧА 1. (МГУ, ф-т почвоведения, 2001) Решить уравнение

$$x^2 - \cos(2x^2) + 1 = 0.$$

РЕШЕНИЕ. «Смешанный» вид этого уравнения говорит о том, что здесь требуются нестандартные действия. Запишем уравнение следующим образом:

$$x^2 + 1 = \cos(2x^2). \quad (1)$$

Левая часть (1) удовлетворяет неравенству  $x^2 + 1 \geq 1$ . В то же время для правой части (1) справедливо противоположное неравенство  $\cos(2x^2) \leq 1$ . Следовательно, равенство в (1) возможно в том и только в том случае, когда оба указанных неравенства одновременно обращаются в равенства; иными словами, уравнение (1) равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 + 1 = 1, \\ \cos(2x^2) = 1. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение  $x = 0$ .

ОТВЕТ:  $x = 0$ .

В общем виде наши рассуждения выглядят следующим образом. Пусть имеется уравнение

$$f(x) = g(x). \quad (2)$$

Функции  $f$  и  $g$  могут быть устроены так, что это уравнение не решается обычными методами. Предположим, однако, что нам удалось найти такое число  $M$ , что для всех допустимых значений  $x$  выполнены неравенства  $f(x) \geq M$  и  $g(x) \leq M$ . Тогда равенство (2) достигается в том единственном случае, когда одновременно  $f(x) = M$  и  $g(x) = M$ ; иными словами, наше «нерешаемое» уравнение (2) оказывается равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = M, \\ g(x) = M. \end{cases} \quad (3)$$

А эту систему уже получается решить стандартными приёмами.

Решение системы (3) — это такое значение  $x$ , при котором функция  $f(x)$  достигает своего минимума и в то же время функция  $g(x)$  достигает своего максимума. Поэтому рассматриваемые задачи называются *минимаксными*<sup>1</sup>.

ЗАДАЧА 2. («Физтех», 2016) Решите уравнение

$$(\cos x - 3 \cos 4x)^2 = 16 + \sin^2 3x.$$

<sup>1</sup>Другие названия данного метода — *метод оценок*, *метод экстремальных оценок*, *метод мажорант*

РЕШЕНИЕ. Из очевидного неравенства  $-4 \leq \cos x - 3 \cos 4x \leq 4$  имеем оценку левой части уравнения:  $(\cos x - 3 \cos 4x)^2 \leq 16$ . В то же время правая часть не меньше 16. Следовательно, равенство возможно лишь в том случае, когда обе части одновременно равны 16.

Левая часть равна 16, когда одновременно  $\cos x = 1$  и  $\cos 4x = -1$  или когда одновременно  $\cos x = -1$  и  $\cos 4x = 1$ . Первый случай невозможен, а во втором имеем  $x = \pi + 2\pi n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ). При таких  $x$ , как нетрудно убедиться, правая часть уравнения равна 16.

ОТВЕТ:  $x = \pi + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

ЗАДАЧА 3. Решите уравнение

$$\cos x + \cos y - \cos(x + y) = \frac{3}{2}.$$

РЕШЕНИЕ. Сумму косинусов превращаем в произведение, а для косинуса суммы пишем формулу половинного угла:

$$2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} - \left( 2 \cos^2 \frac{x+y}{2} - 1 \right) = \frac{3}{2},$$

откуда

$$4 \cos^2 \frac{x+y}{2} - 4 \cos \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2} + 1 = 0. \quad (4)$$

Обозначим

$$t = \cos \frac{x+y}{2}, \quad u = \cos \frac{x-y}{2}.$$

В этих обозначениях уравнение (4) примет вид:

$$4t^2 - 4ut + 1 = 0. \quad (5)$$

Уравнение (5) является квадратным относительно  $t$ , причём  $|u| \leq 1$ . Дискриминант:

$$D/4 = 4(u^2 - 1) \leq 0,$$

поэтому уравнение (5) может иметь корни лишь при нулевом дискриминанте, то есть при  $u = \pm 1$ . Если  $u = 1$ , то  $t = \frac{1}{2}$ , а если  $u = -1$ , то  $t = -\frac{1}{2}$ . Таким образом, уравнение (4) равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} \cos \frac{x-y}{2} = 1, \\ \cos \frac{x+y}{2} = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \cos \frac{x-y}{2} = -1, \\ \cos \frac{x+y}{2} = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Имеем (как обычно,  $k, l \in \mathbb{Z}$ ):

$$\begin{cases} \frac{x-y}{2} = 2\pi k, \\ \frac{x+y}{2} = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi l \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{x-y}{2} = \pi + 2\pi k, \\ \frac{x+y}{2} = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi l. \end{cases}$$

Складываем и вычитаем равенства каждой системы и вводим новые целочисленные величины  $m = k + l$ ,  $n = l - k$ . Этот последний технический шаг оставляется читателю.

ОТВЕТ:  $\left( \frac{\pi}{3} + 2\pi m; \frac{\pi}{3} + 2\pi n \right), \left( -\frac{\pi}{3} + 2\pi m; -\frac{\pi}{3} + 2\pi n \right), m, n \in \mathbb{Z}$ .

В минимаксных задачах иногда используется неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим, справедливое для любых чисел  $a, b \geq 0$ :

$$a + b \geq 2\sqrt{ab} \quad (6)$$

(равенство достигается в единственном случае  $a = b$ ). В частности, если  $a > 0$ , то

$$a + \frac{1}{a} \geq 2 \quad (7)$$

(равенство достигается в единственном случае  $a = 1$ ).

ЗАДАЧА 4. Решить уравнение:

$$\operatorname{tg}^2(\pi(x+y)) + \operatorname{ctg}^2(\pi(x+y)) = \sqrt{\frac{2x}{x^2+1}} + 1.$$

РЕШЕНИЕ. В левой части стоит сумма двух взаимно обратных положительных слагаемых, которая в силу неравенства (7) не меньше 2:

$$\operatorname{tg}^2(\pi(x+y)) + \operatorname{ctg}^2(\pi(x+y)) \geq 2.$$

В то же время для правой части имеем оценку сверху:

$$\sqrt{\frac{2x}{x^2+1}} + 1 = 1 + \sqrt{1 - \frac{(x-1)^2}{x^2+1}} \leq 2$$

(поскольку под корнем стоит величина, не превосходящая 1). Следовательно, наше уравнение будет иметь решения лишь в том случае, когда обе части уравнения равны 2 одновременно.

Правая часть равна 2 только при  $x = 1$  (это легко видеть из полученной выше оценки для правой части). Левая часть равна 2, только если каждое слагаемое равно 1:

$$\operatorname{tg}^2(\pi(1+y)) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \pi(1+y) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{2n-3}{4} \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

ОТВЕТ:  $x = 1, y = \frac{2n-3}{4}, n \in \mathbb{Z}$ .

ЗАДАЧА 5. («Покори Воробьёвы горы!», 2015) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2 \cos x + \cos^2 y - \cos^2 x \sin^2 y = 1, \\ 4 \cos x - 2 \cos^2 x - \sin^3 y = 3. \end{cases} \quad (8)$$

РЕШЕНИЕ. В силу очевидного тождества  $4t - 2t^2 = 2 - 2(1-t)^2$  имеем во втором уравнении:

$$2 - 2(1 - \cos x)^2 - \sin^3 y = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 2(1 - \cos x)^2 = -1 - \sin^3 y.$$

Левая часть полученного уравнения неотрицательна, а правая — неположительна; значит, второе уравнение (8) равносильно системе

$$\begin{cases} 1 - \cos x = 0, \\ -1 - \sin^3 y = 0, \end{cases}$$

откуда  $x = 2\pi n, y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$  ( $n, k \in \mathbb{Z}$ ). Непосредственной проверкой убеждаемся, что эти значения  $x$  и  $y$  удовлетворяют первому уравнению системы (8).

ОТВЕТ:  $(2\pi n, -\frac{\pi}{2} + 2\pi k), n, k \in \mathbb{Z}$

ЗАДАЧА 6. (МГУ, ВМК, 1986) Решить уравнение:

$$\sin 3x - 2 \sin 18x \sin x = 3\sqrt{2} - \cos 3x + 2 \cos x.$$

РЕШЕНИЕ. Перепишем уравнение так:

$$\sin 3x + \cos 3x + 2(a \sin x - \cos x) = 3\sqrt{2}, \quad (9)$$

где введено обозначение  $a = -\sin 18x$ . Во-первых, имеем:

$$\sin 3x + \cos 3x = \sqrt{2} \sin \left( 3x + \frac{\pi}{4} \right) \leq \sqrt{2}. \quad (10)$$

Во-вторых, преобразуем выражение в скобках:

$$a \sin x - \cos x = \sqrt{a^2 + 1} \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}} \sin x - \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} \cos x \right).$$

Поскольку выполнено равенство

$$\left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}} \right)^2 + \left( \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} \right)^2 = 1,$$

существует угол  $\varphi$  такой, что

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}} = \cos \varphi, \quad \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sin \varphi.$$

Таким образом,

$$a \sin x - \cos x = \sqrt{a^2 + 1} (\sin x \cos \varphi - \cos x \sin \varphi) = \sqrt{a^2 + 1} \sin(x - \varphi).$$

Из этого тождества и с учётом неравенства

$$a^2 = \sin^2 18x \leq 1 \quad (11)$$

имеем:

$$a \sin x - \cos x \leq \sqrt{a^2 + 1} \leq \sqrt{2}. \quad (12)$$

Теперь сложим неравенство (10) с удвоенным неравенством (12):

$$\sin 3x + \cos 3x + 2(a \sin x - \cos x) \leq 3\sqrt{2}.$$

Сопоставляя это с нашим уравнением (9), мы приходим к выводу, что в каждом из неравенств (10), (11) и (12) должны одновременно достигаться равенства. Следовательно, исходное уравнение равносильно совокупности двух систем (для случаев  $a = 1$  и  $a = -1$ ):

$$\begin{cases} \sin 3x + \cos 3x = \sqrt{2}, \\ -\sin 18x = 1, \\ \sin x - \cos x = \sqrt{2} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sin 3x + \cos 3x = \sqrt{2}, \\ -\sin 18x = -1, \\ -\sin x - \cos x = \sqrt{2}. \end{cases}$$

После очевидных преобразований:

$$\begin{cases} \sin \left( 3x + \frac{\pi}{4} \right) = 1, \\ \sin 18x = -1, \\ \sin \left( x - \frac{\pi}{4} \right) = 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sin \left( 3x + \frac{\pi}{4} \right) = 1, \\ \sin 18x = 1, \\ \sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right) = -1. \end{cases}$$

В первой системе решениями третьего уравнения являются значения  $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$ , которые удовлетворяют первому и второму уравнениям. Эти значения — решения исходного уравнения.

Во второй системе решениями третьего уравнения являются значения  $x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$ , которые не удовлетворяют второму уравнению и потому не являются решениями исходного уравнения.

ОТВЕТ:  $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

## Задачи

1. Решите уравнение

$$\operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x (\sin y + \cos y) + 2 = 0.$$

$$\mathbb{Z} \ni y \text{ ' } u \text{ ' } y \wedge \exists z \wedge \operatorname{ctg} z = x \text{ ' } u \wedge z + \frac{\pi}{2} = \pi \text{ или } y \wedge \exists z \wedge \operatorname{ctg} z = -x \text{ ' } u \wedge z + \frac{\pi}{2} = \pi$$

2. Решите уравнение

$$\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^4 y + 2 \operatorname{ctg}^2 x \operatorname{ctg}^2 y = 3 + \sin^2(x + y).$$

$$\mathbb{Z} \ni y \text{ ' } u \text{ ' } y \wedge \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \pi \text{ ' } \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = x$$

3. («Покори Воробьёвы горы!», 2018, 10–11) Решите неравенство

$$\frac{1}{3} \operatorname{tg}^2 x + 3 \operatorname{ctg}^2 x \leq 2 \cos^3 3x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \text{ ' } u \wedge z + \frac{\pi}{2} \neq$$

4. («Покори Воробьёвы горы!», 2018, 10–11) Найдите наименьшее значение  $|x - y|$  при условии

$$(\cos^4 x + 1)(4 \cos^4 y + 1) = 8 \cos^3 x \cos^2 y, \quad x \in [\pi; 2\pi], \quad y \in \left[ \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right].$$

$$\frac{\pi}{2} \neq$$

5. («Покори Воробьёвы горы!», 2011) Решите неравенство

$$\sin x \cdot \sin 1755x \cdot \sin 2011x \geq 1.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \text{ ' } u \wedge z + \frac{\pi}{2}$$

6. («Покори Воробьёвы горы!», 2014) Решите уравнение

$$\sin^2 \left( \frac{2013x}{2} \right) \cdot \cos^2(2014x) \cdot \sin^2 \left( \frac{2015x}{2} \right) = 1.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \text{ ' } u \wedge z + u$$

7. («Физтех», 2016) Решите уравнение

$$(\cos 2x - 2 \cos 4x)^2 = 9 + \cos^2 5x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \text{ ' } u \wedge z + \frac{\pi}{2}$$

8. (ОММО, 2013) Решить систему:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 2 \sin^2 y, \\ \sin^2 y + \cos^2 z = 1. \end{cases}$$

$$\mathbb{Z} \ni u' u' u' u' u' u' + \frac{z}{v} = z' u' u' + \frac{z}{v} = n' u' u' + \frac{v}{v} \mp = x$$

9. («Покори Воробьёвы горы!», 2014) Определите минимальное значение величины  $|x + y|$  при условии, что числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют соотношению

$$5 \cos(x + 4y) - 3 \cos(x - 4y) - 4 \sin(x - 4y) = 10.$$

$$\frac{z}{v} \text{ соотнр } \frac{z}{v} - \frac{z}{v}$$

10. («Физтех», 2014) Найдите все значения переменной  $x$ , при каждом из которых оба выражения

$$f(x) = \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\pi \sin x}{4} \right) + \operatorname{ctg}^2 \left( \frac{\pi \sin x}{4} \right) \quad \text{и} \quad g(x) = \frac{\sqrt{32 + 4x - x^2} + 2x - 2}{x - 1}$$

определены, причём значение меньшего из выражений не превосходит двух (если два числа равны, то меньшим считается любое из них).

$$\left\{ \frac{z}{v}, \frac{z}{v}, \frac{z}{v} \right\} \cap (1; 0) \cap (0; 1) \cap (1; 1)$$

11. («Физтех», 2014) Найдите все значения переменной  $x$ , при каждом из которых оба выражения

$$f(x) = \frac{3}{\cos^2 x} + 2\sqrt{3} \operatorname{tg} x \quad \text{и} \quad g(x) = \frac{2x + 1}{\sqrt{21 + 4x - x^2}} + \frac{\sqrt{21 + 4x - x^2}}{2x + 1}$$

определены, причём значение меньшего из выражений не превосходит двух (если два числа равны, то меньшим считается любое из них).

$$\left\{ \frac{z}{v}, \frac{z}{v} \right\} \cap \left( \frac{z}{v}; \frac{z}{v} \right) \cap \left( \frac{z}{v}; \frac{z}{v} \right)$$

12. («Ломоносов», 2015) Найдите все значения  $y \in [2014; 2015]$ , при каждом из которых уравнение

$$\left( \cos x \sin x + \cos^3 x \sin x + \frac{\cos^5 x}{\sin x} \right)^2 - \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} + \sin(9\pi y) = 0$$

имеет решение. В ответ внесите сумму всех таких  $y$ , при необходимости округлив её до двух знаков после запятой.

8908

13. («Покори Воробьёвы горы!», 2015) Решите систему

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2 \pi(x - y) + \operatorname{ctg}^2 \pi(x - y) = \sqrt{\frac{2x}{x^2 + 1}} + 1, \\ x^2 + y^2 \leq 10. \end{cases}$$

$$\frac{z}{v} \dots \frac{z}{v} = u' \left( \frac{v}{z+u} \right) \cdot 1$$

14. («Покори Воробьёвы горы!», 2015) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2 \sin x + \sin^2 y - \sin^2 x \cos^2 y = 1, \\ 2 \cos^2 x + 4 \sin x - \cos^3 y = 5. \end{cases}$$

$$\mathbb{Z} \ni \varphi, u, k; (\varphi\pi/2 + \pi, u\pi/2 + \frac{\pi}{2})$$

15. («Ломоносов», 2008) Решить уравнение

$$\sqrt{2} + \cos x = \left| \cos \frac{4x}{3} \right| \sin x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \varphi, u\pi/2 + \frac{\pi}{2}$$

16. («Покори Воробьёвы горы!», 2016) Найдите количество точек на координатной плоскости, через которые проходит как кривая  $(3x - 4x^3)^{13} = 1 - (4y^3 - 3y)^{18}$ , так и кривая  $x^2 = 1 - y^2$ .

6

17. («Покори Воробьёвы горы!», 2016) Найдите сумму первых ста положительных корней уравнения

$$\cos(8\pi x) + 2 \cos(4\pi x) - \cos(2\pi x) + 2 \sin(\pi x) + 3 = 0.$$

5050

18. (МГУ, «Математика вместо ЕГЭ», 2012) Найдите все пары чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющие уравнению

$$(\cos x + \cos y)(\sin x + \sin y) = 2.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \varphi, k; (u\pi/2 + \frac{\pi}{2}; \varphi\pi/2 + \frac{\pi}{2}), (u\pi/2 + \frac{\pi}{2}; \varphi\pi/2 + \frac{\pi}{2})$$

19. (МГУ, ВМК, 2010) Решите уравнение

$$\operatorname{tg}^2(5x + \sin^2 y) + \left| \frac{5x + \cos 2y}{3} + \frac{3}{5x + \cos 2y} \right| = 4 \cos^2 \frac{7\pi}{4}.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \varphi, (u\pi + \frac{\pi}{2} \operatorname{arccos} \frac{7}{11}; \frac{9\pi}{4} + \frac{\pi}{4}), (u\pi + \frac{\pi}{2} \operatorname{arccos} \frac{7}{11}; \frac{9\pi}{4} + \frac{\pi}{4})$$

20. (МФТИ, 2005) Решить уравнение

$$(5 \sin x + 12 \cos x)(100 + 48 \cos x - 13 \cos 2x) = 1757.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \varphi, u\pi/2 + \frac{13}{5} \operatorname{arcsin} \frac{13}{5}$$

21. (МФТИ, 2005) Решить уравнение

$$(24 \sin x + 7 \cos x)(75 + 28 \cos x - 25 \cos 2x) = 2598.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \varphi, u\pi + \frac{25}{24} \operatorname{arcsin} \frac{25}{24}$$

22. (МГУ, ИСАА, 1993) Решить уравнение:

$$\sin^2 x + 3x^2 \cos x + 3x^2 = 0.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi z + \frac{\pi}{2} = x$$

23. (МГУ, геологич. ф-т, 1983) Решить систему:

$$\begin{cases} 3 \sin 3x + \cos y = -4, \\ x + y = \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi z - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + x$$

24. («Физтех», 2010) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{2} \sin x - \sqrt{3} \cos y = \frac{5}{2}, \\ \sin y + \sqrt{2} \cos x = -\frac{3}{2}. \end{cases}$$

$$\mathbb{Z} \ni u, n; k; \left( u\pi z + \frac{9}{2} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right)$$

25. (МГУ, ВМК, 1992) Решить уравнение:

$$\sqrt{1 + \cos 6x} \sin \frac{3x}{2} = 2\sqrt{2} \cos \frac{2\pi}{3}.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \frac{3}{4} + \frac{\pi}{2} = x$$

26. (МГУ, географич. ф-т, 1998) Решить уравнение:

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 + 3 \cos^2 \left( 2x + \frac{\pi}{6} \right).$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi z + \frac{9}{2} = x$$

27. (МГУ, ф-т психологии, 1993) Найти все корни уравнения

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sin^2 \left( x + \frac{\pi}{12} \right) + \sin 3x = \cos 3x - \sqrt{2}$$

на отрезке  $[-2\pi; 2\pi]$ .

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2} = x$$

28. (МГУ, ф-т психологии, 1992) Решить неравенство:

$$3 \sin 2\pi x \geq \sqrt{2} \sin 4\pi x + 3 \cos 2\pi x + \sqrt{32}.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u + \frac{8}{3} = x$$

29. (МГУ, химический ф-т, 1991) Решить уравнение:

$$\cos^4 x = \frac{1}{4} \cos 2x + \frac{1}{2} \cos^2 x \cos 8x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \frac{z}{uv} + \frac{v}{z} = x$$

30. (МГУ, экономич. ф-т, 1982) Решить уравнение:

$$8 \cos x \cos y \cos(x - y) + 1 = 0.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u(u - v)y + \frac{z}{v} \pm n = n'uv + \frac{z}{v} \mp x$$

31. (МГУ, ф-т почвоведения, 1981) Решить уравнение:

$$\frac{3 + 2 \cos(x - y)}{2} = \frac{\sin^2(x - y)}{2} + \sqrt{3 + 2x - x^2} \cos^2 \frac{x - y}{2}.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, uv + \frac{z}{v} + 1 = n' \cdot 1 = x$$

32. (МГУ, физический ф-т, 1984) Решить систему:

$$\begin{cases} y^4 - 4y^3 - 16y^2 - 8xy - 4x^2 + 32y + 64 = 0, \\ \sin 5\pi x + \sin(\pi(2y^2 - x)) - \sqrt{x(x - 6) + 13} \cos\left(\pi\left(y^2 + 2x + \frac{1}{2}\right)\right) = 0. \end{cases}$$

$$\dots, 6 - 101 - = u, \frac{z}{u+01} \wedge \pm 1 = n', \frac{z}{u+01} \wedge \mp \varepsilon - \frac{v}{u} = x; \mathbb{N} \ni n', \frac{z}{z'n} - v = x$$

33. (МГУ, ВМК, 1983) Решить уравнение:

$$\arcsin^2 x + \arccos^2 x - \frac{5\pi^2}{4} = \sqrt{2 - |y|} \cdot \left(5 \sin^2 x - 6 \sin x \cos x - 9 \cos^2 x + 3\sqrt[3]{33}\right).$$

$$z \mp = n' \cdot 1 - = x$$

34. (МГУ, ВМК, 1986) Решить уравнение:

$$2\sqrt{3} \sin 5x - \sqrt{3} \sin x = \cos 24x \cos x + 2 \cos 5x - 6.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, uvz + \frac{z}{v} = x$$

35. (МГУ, экономич. ф-т, 1990) Найти все корни уравнения

$$\sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2(2\pi x)} \cos(\pi x) + \sin(\pi x) = \sqrt{2}$$

на отрезке  $[-3; 1]$ .

$$\frac{v}{1}, \frac{v}{z} -$$

**36.** (МГУ, географич. ф-т, 2001) Решить уравнение:

$$4 \arcsin(2^x - 7) - \arccos(5^x - 124) = \frac{6\pi}{x}.$$

$x = x$