Минимаксные задачи в тригонометрии

В настоящем листке рассматриваются уравнения, для решения которых используются оценки правой и левой частей. Чтобы стало понятно, о каких задачах идёт речь, начнём с совсем простого примера.

Задача 1. (*МГУ, ф-т почвоведения, 2001*) Решить уравнение

$$x^2 - \cos\left(2x^2\right) + 1 = 0.$$

Решение. «Смешанный» вид этого уравнения говорит о том, что здесь требуются нестандартные действия. Запишем уравнение следующим образом:

$$x^2 + 1 = \cos\left(2x^2\right). \tag{1}$$

Левая часть (1) удовлетворяет неравенству $x^2 + 1 \geqslant 1$. В то же время для правой части (1) справедливо противоположное неравенство $\cos\left(2x^2\right) \leqslant 1$. Следовательно, равенство в (1) возможно в том и только в том случае, когда оба указанных неравенства одновременно обращаются в равенства; иными словами, уравнение (1) равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 + 1 = 1, \\ \cos\left(2x^2\right) = 1. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение $x = 0$.

Ответ: $x = 0$.

В общем виде наши рассуждения выглядят следующим образом. Пусть имеется уравнение

$$f(x) = g(x). \tag{2}$$

Функции f и g могут быть устроены так, что это уравнение не решается обычными методами. Предположим, однако, что нам удалось найти такое число M, что для всех допустимых значений x выполнены неравенства $f(x) \geqslant M$ и $g(x) \leqslant M$. Тогда равенство (2) достигается в том единственном случае, когда одновременно $f(x) = M$ и $g(x) = M$; иными словами, наше «нерешаемое» уравнение (2) оказывается равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = M, \\ g(x) = M. \end{cases} \tag{3}$$

А эту систему уже получается решить стандартными приёмами.

Решение системы (3) — это такое значение x, при котором функция $f(x)$ достигает своего минимума и в то же время функция $g(x)$ достигает своего максимума. Поэтому рассматриваемые задачи называются *минимаксными*[1].

Задача 2. (*«Физтех», 2016*) Решите уравнение

$$(\cos x - 3\cos 4x)^2 = 16 + \sin^2 3x.$$

[1]Другие названия данного метода — *метод оценок, метод экстремальных оценок, метод мажорант*

Решение. Из очевидного неравенства $-4 \leqslant \cos x - 3\cos 4x \leqslant 4$ имеем оценку левой части уравнения: $(\cos x - 3\cos 4x)^2 \leqslant 16$. В то же время правая часть не меньше 16. Следовательно, равенство возможно лишь в том случае, когда обе части одновременно равны 16.

Левая часть равна 16, когда одновременно $\cos x = 1$ и $\cos 4x = -1$ или когда одновременно $\cos x = -1$ и $\cos 4x = 1$. Первый случай невозможен, а во втором имеем $x = \pi + 2\pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$. При таких x, как нетрудно убедиться, правая часть уравнения равна 16.

Ответ: $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 3. Решите уравнение

$$\cos x + \cos y - \cos(x+y) = \frac{3}{2}\,.$$

Решение. Сумму косинусов превращаем в произведение, а для косинуса суммы пишем формулу половинного угла:

$$2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} - \left(2\cos^2\frac{x+y}{2} - 1\right) = \frac{3}{2}\,,$$

откуда

$$4\cos^2\frac{x+y}{2} - 4\cos\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2} + 1 = 0. \qquad (4)$$

Обозначим

$$t = \cos\frac{x+y}{2}\,, \quad u = \cos\frac{x-y}{2}\,.$$

В этих обозначениях уравнение (4) примет вид:

$$4t^2 - 4ut + 1 = 0. \qquad (5)$$

Уравнение (5) является квадратным относительно t, причём $|u| \leqslant 1$. Дискриминант:

$$D/4 = 4(u^2 - 1) \leqslant 0,$$

поэтому уравнение (5) может иметь корни лишь при нулевом дискриминанте, то есть при $u = \pm 1$. Если $u = 1$, то $t = \frac{1}{2}$, а если $u = -1$, то $t = -\frac{1}{2}$. Таким образом, уравнение (4) равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} \cos\dfrac{x-y}{2} = 1, \\ \cos\dfrac{x+y}{2} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \cos\dfrac{x-y}{2} = -1, \\ \cos\dfrac{x+y}{2} = -\dfrac{1}{2}\,. \end{cases}$$

Имеем (как обычно, $k, l \in \mathbb{Z}$):

$$\begin{cases} \dfrac{x-y}{2} = 2\pi k, \\ \dfrac{x+y}{2} = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi l \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{x-y}{2} = \pi + 2\pi k, \\ \dfrac{x+y}{2} = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi l\,. \end{cases}$$

Складываем и вычитаем равенства каждой системы и вводим новые целочисленные величины $m = k + l$, $n = l - k$. Этот последний технический шаг оставляется читателю.

Ответ: $\left(\dfrac{\pi}{3} + 2\pi m; \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n\right)$, $\left(-\dfrac{\pi}{3} + 2\pi m; -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n\right)$, $m, n \in \mathbb{Z}$.

В минимаксных задачах иногда используется неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим, справедливое для любых чисел $a, b \geqslant 0$:

$$a + b \geqslant 2\sqrt{ab} \qquad (6)$$

(равенство достигается в единственном случае $a = b$). В частности, если $a > 0$, то

$$a + \frac{1}{a} \geqslant 2 \tag{7}$$

(равенство достигается в единственном случае $a = 1$).

Задача 4. Решить уравнение:

$$\operatorname{tg}^2(\pi(x+y)) + \operatorname{ctg}^2(\pi(x+y)) = \sqrt{\frac{2x}{x^2+1}} + 1.$$

Решение. В левой части стоит сумма двух взаимно обратных положительных слагаемых, которая в силу неравенства (7) не меньше 2:

$$\operatorname{tg}^2(\pi(x+y)) + \operatorname{ctg}^2(\pi(x+y)) \geqslant 2.$$

В то же время для правой части имеем оценку сверху:

$$\sqrt{\frac{2x}{x^2+1}} + 1 = 1 + \sqrt{1 - \frac{(x-1)^2}{x^2+1}} \leqslant 2$$

(поскольку под корнем стоит величина, не превосходящая 1). Следовательно, наше уравнение будет иметь решения лишь в том случае, когда обе части уравнения равны 2 одновременно.

Правая часть равна 2 только при $x = 1$ (это легко видеть из полученной выше оценки для правой части). Левая часть равна 2, только если каждое слагаемое равно 1:

$$\operatorname{tg}^2(\pi(1+y)) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \pi(1+y) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{2n-3}{4} \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Ответ: $x = 1$, $y = \frac{2n-3}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 5. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015*) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2\cos x + \cos^2 y - \cos^2 x \sin^2 y = 1, \\ 4\cos x - 2\cos^2 x - \sin^3 y = 3. \end{cases} \tag{8}$$

Решение. В силу очевидного тождества $4t - 2t^2 = 2 - 2(1-t)^2$ имеем во втором уравнении:

$$2 - 2(1-\cos x)^2 - \sin^3 y = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 2(1-\cos x)^2 = -1 - \sin^3 y.$$

Левая часть полученного уравнения неотрицательна, а правая — неположительна; значит, второе уравнение (8) равносильно системе

$$\begin{cases} 1 - \cos x = 0, \\ -1 - \sin^3 y = 0, \end{cases}$$

откуда $x = 2\pi n$, $y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ $(n, k \in \mathbb{Z})$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что эти значения x и y удовлетворяют первому уравнению системы (8).

Ответ: $\left(2\pi n, -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $n, k \in \mathbb{Z}$

Задача 6. (*МГУ, ВМК, 1986*) Решить уравнение:

$$\sin 3x - 2\sin 18x \sin x = 3\sqrt{2} - \cos 3x + 2\cos x.$$

Решение. Перепишем уравнение так:

$$\sin 3x + \cos 3x + 2(a \sin x - \cos x) = 3\sqrt{2}\,, \tag{9}$$

где введено обозначение $a = -\sin 18x$. Во-первых, имеем:

$$\sin 3x + \cos 3x = \sqrt{2} \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \leqslant \sqrt{2}\,. \tag{10}$$

Во-вторых, преобразуем выражение в скобках:

$$a \sin x - \cos x = \sqrt{a^2+1}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}\sin x - \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\cos x\right).$$

Поскольку выполнено равенство

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\right)^2 = 1,$$

существует угол φ такой, что

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+1}} = \cos\varphi, \quad \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} = \sin\varphi.$$

Таким образом,

$$a \sin x - \cos x = \sqrt{a^2+1}(\sin x \cos\varphi - \cos x \sin\varphi) = \sqrt{a^2+1}\sin(x-\varphi).$$

Из этого тождества и с учётом неравенства

$$a^2 = \sin^2 18x \leqslant 1 \tag{11}$$

имеем:

$$a \sin x - \cos x \leqslant \sqrt{a^2+1} \leqslant \sqrt{2}\,. \tag{12}$$

Теперь сложим неравенство (10) с удвоенным неравенством (12):

$$\sin 3x + \cos 3x + 2(a \sin x - \cos x) \leqslant 3\sqrt{2}\,.$$

Сопоставляя это с нашим уравнением (9), мы приходим к выводу, что в каждом из неравенств (10), (11) и (12) должны одновременно достигаться равенства. Следовательно, исходное уравнение равносильно совокупности двух систем (для случаев $a = 1$ и $a = -1$):

$$\begin{cases} \sin 3x + \cos 3x = \sqrt{2}\,, \\ -\sin 18x = 1, \\ \sin x - \cos x = \sqrt{2} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sin 3x + \cos 3x = \sqrt{2}\,, \\ -\sin 18x = -1, \\ -\sin x - \cos x = \sqrt{2}. \end{cases}$$

После очевидных преобразований:

$$\begin{cases} \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 1, \\ \sin 18x = -1, \\ \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 1, \\ \sin 18x = 1, \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1. \end{cases}$$

В первой системе решениями третьего уравнения являются значения $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, которые удовлетворяют первому и второму уравнениям. Эти значения — решения исходного уравнения.

Во второй системе решениями третьего уравнения являются значения $x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$, которые не удовлетворяют второму уравнению и потому не являются решениями исходного уравнения.

Ответ: $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задачи

1. Решите уравнение

$$\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x(\sin y + \cos y) + 2 = 0.$$

$\boxed{y = \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ x = -\operatorname{arctg}\sqrt{2} + \pi k \text{ или } y = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n,\ x = \operatorname{arctg}\sqrt{2} + \pi k,\ n, k \in \mathbb{Z}}$

2. Решите уравнение

$$\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^4 y + 2\operatorname{ctg}^2 x \operatorname{ctg}^2 y = 3 + \sin^2(x+y).$$

$\boxed{x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ y = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi n}{2} + \pi k,\ n, k \in \mathbb{Z}}$

3. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2011*) Решите неравенство

$$\sin x \cdot \sin 1755x \cdot \sin 2011x \geqslant 1.$$

$\boxed{\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

4. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014*) Решите уравнение

$$\sin^2\left(\frac{2013x}{2}\right) \cdot \cos^2(2014x) \cdot \sin^2\left(\frac{2015x}{2}\right) = 1.$$

$\boxed{\pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

5. (*«Физтех», 2016*) Решите уравнение

$$(\cos 2x - 2\cos 4x)^2 = 9 + \cos^2 5x.$$

$\boxed{\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

6. (*ОММО, 2013*) Решить систему:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 2\sin^2 y, \\ \sin^2 y + \cos^2 z = 1. \end{cases}$$

$\boxed{x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi k,\ y = \frac{\pi}{2} + \pi m,\ z = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ k, m, n \in \mathbb{Z}}$

7. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014*) Определите минимальное значение величины $|x+y|$ при условии, что числа x и y удовлетворяют соотношению

$$5\cos(x+4y) - 3\cos(x-4y) - 4\sin(x-4y) = 10.$$

$\boxed{\frac{\pi}{8} - \frac{3}{8}\arccos\frac{3}{5}}$

8. (*«Физтех», 2014*) Найдите все значения переменной x, при каждом из которых оба выражения

$$f(x) = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi \sin x}{4}\right) + \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi \sin x}{4}\right) \quad \text{и} \quad g(x) = \frac{\sqrt{32+4x-x^2}+2x-2}{x-1}$$

определены, причём значение меньшего из выражений не превосходит двух (если два числа равны, то меньшим считается любое из них).

$\boxed{[-4; -\pi) \cup (-\pi; 0) \cup (0; 1) \cup \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, 8\right\}}$

9. (*«Физтех», 2014*) Найдите все значения переменной x, при каждом из которых оба выражения

$$f(x) = \frac{3}{\cos^2 x} + 2\sqrt{3}\operatorname{tg} x \quad \text{и} \quad g(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{21+4x-x^2}} + \frac{\sqrt{21+4x-x^2}}{2x+1}$$

определены, причём значение меньшего из выражений не превосходит двух (если два числа равны, то меньшим считается любое из них).

$\boxed{\left(-3; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}; -\frac{1}{2}\right) \cup \left\{\frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, 2\right\}}$

10. (*«Ломоносов», 2015*) Найдите все значения $y \in [2014; 2015]$, при каждом из которых уравнение

$$\left(\cos x \sin x + \cos^3 x \sin x + \frac{\cos^5 x}{\sin x}\right)^2 - \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} + \sin(9\pi y) = 0$$

имеет решение. В ответ внесите сумму всех таких y, при необходимости округлив её до двух знаков после запятой.

$\boxed{8058}$

11. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015*) Решите систему

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2 \pi(x-y) + \operatorname{ctg}^2 \pi(x-y) = \sqrt{\dfrac{2x}{x^2+1}} + 1, \\ x^2 + y^2 \leqslant 10. \end{cases}$$

$\boxed{\left(1, \frac{2n+5}{4}\right),\ n = -8, -7, \ldots, 3}$

12. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015*) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2\sin x + \sin^2 y - \sin^2 x \cos^2 y = 1, \\ 2\cos^2 x + 4\sin x - \cos^3 y = 5. \end{cases}$$

$\boxed{\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \pi + 2\pi k\right),\ n, k \in \mathbb{Z}}$

13. (*«Ломоносов», 2008*) Решить уравнение

$$\sqrt{2} + \cos x = \left|\cos\frac{4x}{3}\right| \sin x.$$

$\boxed{\frac{3\pi}{4} + 6\pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

14. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016*) Найдите количество точек на координатной плоскости, через которые проходит как кривая $(3x-4x^3)^{13}=1-(4y^3-3y)^{18}$, так и кривая $x^2=1-y^2$.

$\boxed{6}$

15. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016*) Найдите сумму первых ста положительных корней уравнения

$$\cos(8\pi x)+2\cos(4\pi x)-\cos(2\pi x)+2\sin(\pi x)+3=0.$$

$\boxed{5050}$

16. (*МГУ, «Математика вместо ЕГЭ», 2012*) Найдите все пары чисел $(x;y)$, удовлетворяющие уравнению

$$(\cos x+\cos y)(\sin x+\sin y)=2.$$

$\boxed{\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k;\ \frac{\pi}{4}+2\pi n\right),\ \left(\frac{5\pi}{4}+2\pi k;\ \frac{5\pi}{4}+2\pi n\right),\ k,n\in\mathbb{Z}}$

17. (*МГУ, ВМК, 2010*) Решите уравнение

$$\mathrm{tg}^2\left(5x+\sin^2 y\right)+\left|\frac{5x+\cos 2y}{3}+\frac{3}{5x+\cos 2y}\right|=4\cos^2\frac{7\pi}{4}\,.$$

$\boxed{\left(\frac{2+2\pi}{15};\ \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{7-2\pi}{3}+\pi n\right),\ \left(-\frac{4+2\pi}{15};\ \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{2\pi-5}{3}+\pi n\right),\ n\in\mathbb{Z}}$

18. (*МФТИ, 2005*) Решить уравнение

$$(5\sin x+12\cos x)(100+48\cos x-13\cos 2x)=1757.$$

$\boxed{\arcsin\frac{5}{13}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}}$

19. (*МФТИ, 2005*) Решить уравнение

$$(24\sin x+7\cos x)(75+28\cos x-25\cos 2x)=2598.$$

$\boxed{\arcsin\frac{24}{25}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}}$

20. (*МГУ, ИСАА, 1993*) Решить уравнение:

$$\sin^2 x+3x^2\cos x+3x^2=0.$$

$\boxed{x=0;\ \pi+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}}$

21. (*МГУ, геологич. ф-т, 1983*) Решить систему:

$$\begin{cases} 3\sin 3x+\cos y=-4, \\ x+y=\dfrac{3\pi}{2}\,. \end{cases}$$

$\boxed{x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ y=\pi-2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}}$

22. (*«Физтех», 2010*) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{2}\sin x - \sqrt{3}\cos y = \dfrac{5}{2}\,, \\ \sin y + \sqrt{2}\cos x = -\dfrac{3}{2}\,. \end{cases}$$

$\boxed{\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right);\ k, n \in \mathbb{Z}}$

23. (*МГУ, ВМК, 1992*) Решить уравнение:

$$\sqrt{1 + \cos 6x}\,\sin\frac{3x}{2} = 2\sqrt{2}\cos\frac{2\pi}{3}\,.$$

$\boxed{x = -\frac{\pi}{3} + \frac{4\pi n}{3},\ n \in \mathbb{Z}}$

24. (*МГУ, географич. ф-т, 1998*) Решить уравнение:

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2 + 3\cos^2\left(2x + \frac{\pi}{6}\right).$$

$\boxed{x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

25. (*МГУ, ф-т психологии, 1993*) Найти все корни уравнения

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^2\left(x + \frac{\pi}{12}\right) + \sin 3x = \cos 3x - \sqrt{2}$$

на отрезке $[-2\pi; 2\pi]$.

$\boxed{-\frac{\pi}{12},\ \frac{23\pi}{12}}$

26. (*МГУ, ф-т психологии, 1992*) Решить неравенство:

$$3\sin 2\pi x \geqslant \sqrt{2}\sin 4\pi x + 3\cos 2\pi x + \sqrt{32}\,.$$

$\boxed{x = \frac{3}{8} + n,\ n \in \mathbb{Z}}$

27. (*МГУ, химический ф-т, 1991*) Решить уравнение:

$$\cos^4 x = \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{2}\cos^2 x\cos 8x.$$

$\boxed{x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}}$

28. (*МГУ, экономич. ф-т, 1982*) Решить уравнение:

$$8\cos x\cos y\cos(x - y) + 1 = 0.$$

$\boxed{x = \mp\frac{\pi}{3} + \pi n,\ y = \pm\frac{\pi}{3} + \pi(k - n),\ n, k \in \mathbb{Z}}$

29. (*МГУ, ф-т почвоведения, 1981*) Решить уравнение:

$$\frac{3+2\cos(x-y)}{2}=\frac{\sin^2(x-y)}{2}+\sqrt{3+2x-x^2}\cos^2\frac{x-y}{2}\,.$$

$\boxed{x=1,\ y=1+\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}}$

30. (*МГУ, физический ф-т, 1984*) Решить систему:

$$\begin{cases} y^4-4y^3-16y^2-8xy-4x^2+32y+64=0, \\ \sin 5\pi x+\sin\left(\pi(2y^2-x)\right)-\sqrt{x(x-6)+13}\cos\left(\pi\left(y^2+2x+\dfrac{1}{2}\right)\right)=0. \end{cases}$$

$\boxed{x=4-\frac{y^2}{2}\,,\ y\in\mathbb{R};\ x=\frac{n}{4}-3\pm\sqrt{\frac{10+n}{2}}\,,\ y=1\mp\sqrt{\frac{10+n}{2}}\,,\ n=-10,-9,\ldots}$

31. (*МГУ, ВМК, 1983*) Решить уравнение:

$$\arcsin^2 x+\arccos^2 x-\frac{5\pi^2}{4}=\sqrt{2-|y|}\cdot\left(5\sin^2 x-6\sin x\cos x-9\cos^2 x+3\sqrt[3]{33}\right).$$

$\boxed{x=-1,\ y=\pm 2}$

32. (*МГУ, ВМК, 1986*) Решить уравнение:

$$2\sqrt{3}\sin 5x-\sqrt{3}\sin x=\cos 24x\cos x+2\cos 5x-6.$$

$\boxed{x=\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}}$

33. (*МГУ, экономич. ф-т, 1990*) Найти все корни уравнения

$$\sqrt{1-\operatorname{ctg}^2(2\pi x)}\cos(\pi x)+\sin(\pi x)=\sqrt{2}$$

на отрезке $[-3;1]$.

$\boxed{-\frac{7}{4}\,,\ \frac{1}{4}}$

34. (*МГУ, географич. ф-т, 2001*) Решить уравнение:

$$4\arcsin\left(2^x-7\right)-\arccos\left(5^x-124\right)=\frac{6\pi}{x}\,.$$

$\boxed{x=3}$