Исследование тригонометрических функций

Напомним, что функция $f(x)$ называется *периодической*, если существует такое число $T \neq 0$, что для любого x из области определения функции f оба числа $x \pm T$ также принадлежат её области определения и выполнены равенства $f(x+T) = f(x-T) = f(x)$. Число T при этом называется *периодом* данной функции.

Основные тригонометрические функции являются периодическими. Так, функции $\sin x$ и $\cos x$ имеют наименьший положительный период 2π; функции $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ имеют наименьший положительный период π.

Задача. Докажите, что функция $f(x) = \sin 2x + \cos 3x$ является периодической, и найдите её наименьший положительный период.

Решение. Легко видеть, что

$$f(x+2\pi) = \sin(2(x+2\pi)) + \cos(3(x+2\pi)) = \\ = \sin(2x+4\pi) + \cos(3x+6\pi) = \sin 2x + \cos 3x = f(x),$$

поэтому функция $f(x)$ периодична с периодом 2π. Найдём её наименьший положительный период.

Пусть T — некоторый период функции $f(x)$. Тогда для любого x имеем:

$$\sin(2(x+T)) + \cos(3(x+T)) = \sin 2x + \cos 3x,$$
$$\sin(2x+2T) - \sin 2x = \cos 3x - \cos(3x+3T),$$

что после преобразования разностей синусов и косинусов в произведения приводит к равенству

$$\sin T \cos(2x+T) = \sin\frac{3T}{2}\sin\left(3x + \frac{3T}{2}\right). \qquad (1)$$

Это равенство, напомним, должно выполняться *при всех* $x \in \mathbb{R}$. Для этого достаточно, чтобы

$$\begin{cases} \sin T = 0, \\ \sin\dfrac{3T}{2} = 0, \end{cases} \qquad (2)$$

то есть

$$\begin{cases} T = \pi k, \ k \in \mathbb{Z}, \\ T = \dfrac{2\pi m}{3}, \ m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Из этих равенств имеем $3k = 2m$, откуда k — чётное число, $k = 2n$ (и тогда $m = 3n$, $n \in \mathbb{Z}$). Следовательно, $T = 2\pi n$.

Покажем теперь, что система (2) является также и необходимым условием выполнимости равенства (1) при любом x (иными словами, других периодов, кроме $2\pi n$, наша функция иметь не может). В самом деле, пусть $T \neq 2\pi n$ и пусть $x = -\frac{T}{2}$. Тогда левая часть (1) равна $\sin T \neq 0$, а правая часть равна нулю. Значит, равенство (1) не может быть выполнено при всех x.

Таким образом, все периоды нашей функции даются формулой $T = 2\pi n$, (n — ненулевое целое число), а наименьшим положительным периодом будет число 2π.

На олимпиадах и экзаменах встречаются задачи, в которых требуется найти множество значений тригонометрической функции, наибольшее и наименьшее значения и т. д.

Задача. (*МГУ, ф-т глобальных процессов, 2005*) Выясните, верно ли следующее утверждение: множество значений функции $y = \cos 2x - 3\sin x$ принадлежит отрезку $\left[-4; \sqrt{5}\,\right]$.

Решение. Имеем: $y = 1 - 2\sin^2 x - 3\sin x$. Сделаем замену $t = \sin x$. Когда x пробегает все значения из $\mathbb{R}$, величина t пробегает все значения из отрезка $[-1; 1]$. Поэтому задача сводится к нахождению множества значений квадратичной функции $y(t) = -2t^2 - 3t + 1$ на отрезке $I = [-1; 1]$.

Графиком функции $y(t)$ служит парабола, ветви которой направлены вниз. Абсцисса вершины параболы $t_0 = -\frac{3}{4}$ принадлежит отрезку I, поэтому наибольшее значение функции на данном отрезке достигается в вершине параболы:

$$y_{\max} = y(t_0) = -2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^2 - 3 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) + 1 = \frac{17}{8}\,.$$

Наименьшее значение функции $y(t)$ на отрезке I достигается на одном из концов отрезка. Вычисляем:

$$y(-1) = 2,\ y(1) = -4 \ \Rightarrow\ y_{\min} = -4.$$

Итак, множество значений нашей функции на отрезке I есть отрезок $E(y) = \left[-4; \frac{17}{8}\right]$. Остаётся сравнить числа $\frac{17}{8}$ и $\sqrt{5}$. Имеем:

$$\frac{17}{8} - \sqrt{5} = \sqrt{\frac{289}{64}} - \sqrt{5} = \sqrt{\frac{289}{64}} - \sqrt{\frac{320}{64}} < 0.$$

Поэтому $E(y) \subset \left[-4; \sqrt{5}\,\right]$, так что утверждение задачи верно.

Задача. (*МФТИ, 1996*) Дана функция

$$f(x) = \frac{2\sin^4 x + 3\cos^2 x}{2\cos^4 x + \sin^2 x}\,.$$

Найти:
1) корни уравнения $f(x) = \frac{15}{7}$;
2) наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$.

Решение. Имеем:

$$f(x) = \frac{2\sin^4 x + 3\left(1 - \sin^2 x\right)}{2\left(1 - \sin^2 x\right)^2 + \sin^2 x}\,;$$

после замены $t = \sin^2 x$ и несложных преобразований получаем функцию

$$f(t) = \frac{2t^2 - 3t + 3}{2t^2 - 3t + 2} = 1 + \frac{1}{2t^2 - 3t + 2}\,, \quad t \in [0; 1]. \tag{3}$$

Приравнивая данное выражение к $\frac{15}{7}$, легко получаем $16t^2 - 24t + 9 = 0$, то есть $(4t - 3)^2 = 0$. Отсюда $t = \frac{3}{4}$, $\sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$. Это ответ на вопрос пункта 1.

Требование пункта 2 равносильно следующему: найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(t)$ на отрезке $I = [0; 1]$. Для этого запишем (3) в виде

$$f(t) = 1 + \frac{1}{\varphi(t)}\,,$$

где $\varphi(t) = 2t^2 - 3t + 2$. Дискриминант данного квадратного трёхчлена меньше нуля, поэтому функция $\varphi(t)$ принимает только положительные значения.

Графиком функции $\varphi(t)$ служит парабола, ветви которой направлены вверх. Абсцисса вершины $t_0 = \frac{3}{4}$ принадлежит отрезку I, поэтому наименьшее значение функции $\varphi(t)$ на I достигается в вершине:

$$\varphi_{\min} = \varphi(t_0) = \frac{9}{8} - \frac{9}{4} + 2 = \frac{7}{8}\,.$$

Наибольшего значения функция φ достигает на одном из концов отрезка I:

$$\varphi(0) = 2,\ \varphi(1) = 1 \ \Rightarrow\ \varphi_{\max} = 2.$$

Теперь находим наибольшее и наименьшее значения функции f:

$$f_{\max} = 1 + \frac{1}{\varphi_{\min}} = 1 + \frac{8}{7} = \frac{15}{7}\,;$$
$$f_{\min} = 1 + \frac{1}{\varphi_{\max}} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\,.$$

Ответ: 1) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{15}{7}$ и $\frac{3}{2}$.

В некоторых случаях можно исследовать тригонометрическую функцию с помощью так называемого *метода вспомогательного аргумента*. Напомним, что речь идёт о следующем преобразовании:

$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right),$$

и поскольку

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1,$$

точка с координатами $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}; \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ расположена на единичной окружности; следовательно, существует такой угол φ, что

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\,, \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,.$$

Поэтому

$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}(\cos x\cos\varphi + \sin x\sin\varphi) = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\varphi).$$

Отсюда, в частности, вытекает, что множество значений функции $a\cos x + b\sin x$ есть отрезок $\left[-\sqrt{a^2+b^2}; \sqrt{a^2+b^2}\,\right]$.

Задача. (*МГУ, геологич. ф-т, 1981*) Принимает ли функция

$$y = \sin^2 x - 12\sin x\cos x + 3\cos^2 x - 2\sqrt[3]{66}$$

хотя бы в одной точке положительное значение?

Решение. Имеем:

$$y = \frac{1-\cos 2x}{2} - 6\sin 2x + 3\cdot\frac{1+\cos 2x}{2} - 2\sqrt[3]{66} = \cos 2x - 6\sin 2x + 2 - 2\sqrt[3]{66}\,.$$

Вводя вспомогательный аргумент, получим

$$y = \sqrt{37}\cos(2x+\varphi) + 2 - 2\sqrt[3]{66}\,,$$

где
$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{37}}\,, \quad \sin\varphi = \frac{6}{\sqrt{37}}\,.$$

Если $x = -\frac{\varphi}{2}$, то
$$y_{\max} = \sqrt{37} + 2 - 2\sqrt[3]{66}\,.$$

Обозначим $p = \sqrt{37} + 2$ и $q = 2\sqrt[3]{66}$. Тогда $y_{\max} = p - q$, и нужно сравнить данную разность с нулём. Заметим при этом, что $p - q$ имеет тот же знак, что и $p^3 - q^3$. Вычисляем:
$$p^3 = \left(\sqrt{37} + 2\right)^3 = 230 + 49\sqrt{37}\,, \quad q^3 = 528,$$
откуда
$$p^3 - q^3 = 49\sqrt{37} - 298 = \sqrt{88837} - \sqrt{88804} > 0.$$
Следовательно, $y_{\max} > 0$, и поэтому ответ на вопрос задачи — утвердительный.

Задача. (*«Ломоносов», 2014*) Найдите наименьшее значение выражения
$$\frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}{2\left(\sqrt{3}\sin x - \cos x\right)\cos 3x - \cos 6x - 7}\,.$$

Решение. Обозначим данное выражение через f и преобразуем его:
$$f = \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}{4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x\right)\cos 3x - (2\cos^2 3x - 1) - 7} = \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}{4\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\cos 3x - 2\cos^2 3x - 6}\,.$$

Обозначим также $a = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$, $b = \cos 3x$. Имеем:
$$f = \frac{a}{4ab - 2b^2 - 6} = \frac{-a}{2(a-b)^2 + 6 - 2a^2}\,.$$

Знаменатель последней дроби положителен. Чтобы не связываться со знаком a, оценим модуль полученного выражения с учётом неравенств $(a-b)^2 \geqslant 0$ и $|a| \leqslant 1$:
$$|f| = \frac{|a|}{2(a-b)^2 + 6 - 2a^2} \leqslant \frac{|a|}{6 - 2a^2} \leqslant \frac{1}{6 - 2\cdot 1} = \frac{1}{4}\,,$$
откуда
$$-\frac{1}{4} \leqslant f \leqslant \frac{1}{4}\,.$$

Если $x = \frac{2\pi}{3}$, то $a = b = 1$, и тогда в оценке снизу достигается равенство. Следовательно, наименьшее значение величины f равно $-\frac{1}{4}$.

Задачи

1. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016*) Сравните числа $(\sin 1 + \cos 1)$ и $\frac{49}{36}$. Ответ обоснуйте.

Первое число больше

2. (*Всеросс., 2015, МЭ, 11*) Не используя калькулятора, определите знак числа
$$(\cos(\cos 1) - \cos 1)\,(\sin(\sin 1) - \sin 1)\,.$$

Минус

3. (*«Физтех», 2013*) Сколько существует натуральных n таких, что функция

$$f(x) = \cos nx \cdot \sin \frac{10x}{n}$$

имеет период 6π?

$\boxed{8}$

4. (*«Физтех», 2011*) Сколько различных целых значений принимает функция

$$f(x) = 17 \sin x + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x\,?$$

$\boxed{32}$

5. (*МГУ, филологич. ф-т, 1978*) Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = \sin^2 x + \cos x - \frac{1}{2}\,.$$

$\boxed{\frac{3}{4} \text{ и } -\frac{3}{2}}$

6. (*МГУ, ф-т глобальных процессов, 2005*) Выясните, верно ли следующее утверждение: множество значений функции $y = 2\cos 4x - \cos 2x$ принадлежит отрезку $\left[-\frac{3}{\sqrt{2}}; 3\right]$.

$\boxed{\text{Верно}}$

7. (*МГУ, мехмат, 1995*) Найти все числа k, для которых функция

$$y(x) = k(2\sin x + \cos^2 x + 1)$$

не принимает значений, бо́льших 3.

$\boxed{[-3; 1]}$

8. (*МГУ, мехмат, 2010*) Найдите наименьшее из положительных значений функции

$$f(x) = \frac{4}{3\cos^2 x + 2\sin x - 1}\,.$$

$\boxed{\frac{12}{7}}$

9. (*«Физтех», 2011*) Найдите наименьшее значение выражения

$$3\sin^2\alpha + 7\cos^2\alpha + 8\sin^4\alpha + 12\cos^4\alpha.$$

$\boxed{9{,}2}$

10. (*«Ломоносов», 2015*) Найдите наименьшее значение выражения

$$\left(3\sqrt{2(1+\cos 2x)} - \sqrt{8 - 4\sqrt{3}}\sin x + 2\right) \cdot \left(3 + 2\sqrt{11 - \sqrt{3}}\cos y - \cos 2y\right).$$

$\boxed{4\sqrt{3} - 40}$

11. (*«Ломоносов», 2016*) Найдите максимальное число, принадлежащее множеству значений функции

$$f(x) = 14125\sin^2 x + 20\cos^2 x + 24180\sin 2x - 6048\cos x - 8064\sin x + 6025.$$

$\boxed{48365}$

12. (*«Ломоносов», 2012*) Найдите множество значений функции

$$y(x) = \mathrm{tg}^2\, 2x + 6\sin x - 2\cos 2x - \frac{1}{\cos^2 2x}\,.$$

$\boxed{\left[-\frac{21}{4};7\right] \setminus \left\{3\sqrt{2}-1\right\}}$

13. (*МФТИ, 1996*) Дана функция

$$f(x) = \frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{\sin^4 x + \cos^4 x}\,.$$

Найти:
1) корни уравнения $f(x) = \frac{7}{10}$;
2) наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$.

$\boxed{1)\ \pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z};\ 2)\ 1 \text{ и } \frac{1}{2}}$

14. (*«Физтех», 2015, 10*) Дана функция

$$g(x) = \frac{2\cos^4 x + \sin^2 x}{2\sin^4 x + 3\cos^2 x}\,.$$

Найдите:

а) корни уравнения $g(x) = \frac{1}{2}$;
б) наибольшее и наименьшее значения функции $g(x)$.

$\boxed{\text{а) } \frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ \frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z};\ \text{б) } \frac{2}{3} \text{ и } \frac{7}{15}}$

15. (*МГУ, геологич. ф-т, 1998*) Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = \cos x + 4\cos\frac{x}{2} + 7\cos\frac{x}{4} + 6\cos\frac{x}{8}\,.$$

$\boxed{18 \text{ и } -9}$

16. (*МГУ, ф-т почвоведения, 1997*) Найти наибольшее и наименьшее значения выражения

$$\left(-3\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}\cos x - 1\right)\left(\frac{1-\cos 2y}{2} + \sqrt{11-\sqrt{3}}\cos y + 1\right).$$

$\boxed{10-\sqrt{3} \text{ и } -\left(1+\sqrt{11-\sqrt{3}}\right)^2}$

17. (*«Ломоносов», 2014*) Найдите наибольшее значение выражения

$$\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{2\sqrt{2}\,(\sin x+\cos x)\cos 4x-\cos 8x-5}\,.$$

$\boxed{\frac{1}{2}}$

18. (*ОММО, 2009*) Найдите сумму всех корней уравнения

$$2\cos 3x+8|\sin x|-7=0,$$

принадлежащих отрезку $[-\frac{2\pi}{3};\frac{3\pi}{4}]$.

$\boxed{0}$

19. (*МГУ, экономич. ф-т, 2000*) Про функцию $f(x)$ известно, что она определена на отрезке $\left[\frac{1}{6};6\right)$ и удовлетворяет на этом множестве системе

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\cos^2 f(x)-\frac{1}{2}}-12\cos\left(2f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)=\dfrac{10}{x}\,,\\ 0\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{\pi}{4}\,. \end{cases}$$

Решить неравенство $f(x)\leqslant\frac{\pi}{8}$.

$\boxed{\left[3\sqrt{2};6\right)}$

20. (*Олимпиада ВШЭ, 2011, 11*) Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x)=\cos(\cos(\cos x)).$$

$\boxed{\cos(\cos 1)\text{ и }\cos 1}$