

## Тригонометрия в МГУ и МФТИ

Сокращения для МГУ:

- *ДВИ* — дополнительное вступительное испытание по математике;
- *МЕ* — экзамен «Математика вместо ЕГЭ» (с 2011 г.) или экзамен, альтернативный ЕГЭ по математике (2010–2011 гг.);
- *МИ* — экзамен по математике для иностранных граждан;
- *ЦЭ* — централизованный экзамен по математике для поступающих на договорные образовательные программы.

Во всех ответах предполагается, что  $n, k \in \mathbb{Z}$ .

1. (МГУ, ДВИ, 2012) Решите уравнение:

$$\sin 4x + \sqrt{3} \sin 3x + \sin 2x = 0.$$

$\frac{x}{\pi}$

2. (МГУ, МЕ, 2012) Найдите все пары чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющие уравнению

$$(\cos x + \cos y)(\sin x + \sin y) = 2.$$

$(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}), (\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2})$

3. (МГУ, МИ, 2012) Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 4 + \cos 2x = 7 \sin y, \\ y^2 - x^2 = \pi y - \frac{\pi^2}{4}. \end{cases}$$

$(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}), (\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}), (\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}), (\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2})$

4. (МГУ, ЦЭ, 2012) Решите уравнение:

$$\sin^2 2x = \sin^2 x.$$

$\frac{x}{\pi}$

5. (МГУ, ДВИ, 2011) Решите уравнение:

$$(\sin x - \cos x)^2 = 2.$$

$\frac{\pi}{2} - x$

6. (МГУ, МЕ, 2011) Решите уравнение:

$$\sqrt{6 \sin x} = 2 \cos x.$$

$$\frac{\pi}{2} + \frac{9}{\pi}$$

7. (МГУ, мехмат, 2010) Найдите наименьшее из положительных значений функции

$$\frac{4}{3 \cos^2 x + 2 \sin x - 1}.$$

$$\frac{\pi}{21}$$

8. (МГУ, ВМК, 2010) Решите уравнение

$$\operatorname{tg}^2(5x + \sin^2 y) + \left| \frac{5x + \cos 2y}{3} + \frac{3}{5x + \cos 2y} \right| = 4 \cos^2 \frac{7\pi}{4}.$$

$$\left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right); \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right)$$

9. (МГУ, ф-т биоинженерии и биоинформатики, 2010) а) Решите уравнение

$$\frac{9(\sin x + \cos x)^2}{\cos 2x} + \frac{32(1 + 7 \operatorname{ctg} x \operatorname{tg} 4x)}{\operatorname{tg} x + 7 \operatorname{tg} 4x} + 7 = 0.$$

б) Найдите сумму всех корней этого уравнения, принадлежащих отрезку  $[0; 120\pi]$ , и выясните, что больше: эта сумма или число 23040.

$$\text{а) } \arctg 4 + \pi n; \text{ б) } 120 \arctg 4 + 7140\pi > 23040$$

10. (МГУ, ф-т государственного управления, 2010) Найдите  $\cos \alpha$  и  $\operatorname{tg} 2\alpha$ , если известно, что  $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ , а  $\cos(\alpha - \frac{\pi}{3}) < 0$ .

$$-\frac{2\sqrt{2}}{3}, -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

11. (МГУ, МЕ, 2010) Решите уравнение

$$2 \sin^4 x + 7 \cos^3 x = 2.$$

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$$

12. (МГУ, ЦЭ, 2010) Найдите все решения уравнения

$$\sqrt{\operatorname{tg} 3x} = \sqrt{-\operatorname{tg} x},$$

удовлетворяющие неравенству  $0 \leq x < \pi$ .

$$\frac{\pi}{3}$$

13. (МГУ, МИ, 2010) Решите уравнение

$$\frac{\cos x + \sin 2x}{\cos 3x} = 1.$$

uл

14. (МГУ, мехмат, 2009) Решить уравнение

$$\cos 4x + \sin \left( 2x - \frac{a\pi}{64} \right) = \sin 3x,$$

где  $a$  — наименьшее из таких двузначных натуральных чисел, при приписывании которых справа к числу 20092009 полученное десятизначное число делится на 36.

uл +  $\frac{9}{x}$  u(1-) ;  $\frac{x}{uл}$

15. (МГУ, мехмат, 2009) Найдите все значения аргумента  $x$ , при каждом из которых соответствующее значение функции

$$f(x) = \frac{2 \cos \frac{\pi(15+x)}{6} + 1}{\sqrt{14 + 5x - x^2}}$$

положительно.

(L:q) ∩ (1:z-)

16. (МГУ, ф-т биоинженерии и биоинформатики, 2009) Решить уравнение

$$8 \cos^2 5x - 4 \cos^2 10x = 1.$$

uл +  $\frac{1}{x}$  ∓

17. (МГУ, ф-т государственного управления, 2009) Решить уравнение

$$\cos 2x - 4\sqrt{2} \cos x + 4 = 0.$$

$\frac{x}{uл} + \frac{x1}{x}$  ∓

18. (МГУ, МЕ, 2009) Решить уравнение

$$\sin 2x + \cos 2x = |\sin 2x|^{-1}.$$

uл +  $\frac{8}{x}$  ; uл +  $\frac{1}{x}$

19. (МГУ, ЦЭ, 2009) Решить уравнение

$$2 \cos^2 x - 5 \sin 2x + \frac{6t}{\pi} = 0,$$

где  $t = \arccos \left( \cos \frac{23\pi}{3} \right) - \arcsin \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ .

uл +  $\frac{x}{x}$  ∓ arccos ; uл +  $\frac{1}{x}$

20. (МГУ, мехмат, 2008) Игорь решил тригонометрическое уравнение и получил ответ

$$(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad \frac{4\pi}{3} \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad n, k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ в конце учебника выглядел иначе:

$$-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}k, \quad n, k \in \mathbb{Z}.$$

Правильный ли ответ получил Игорь? Привести пример тригонометрического уравнения с ответом как в учебнике.

$$0 = \left( \frac{x}{\sqrt{x}} + x \cos \right) (1 - x \cos)$$

21. (МГУ, ВМК, 2008) Решить неравенство

$$\sqrt{1 - \sin 2x} + |\sin x| \leq \cos x.$$

$$2\pi n + \frac{\pi}{3} \leq x \leq \pi n$$

22. (МГУ, физический ф-т, 2008) Указать в градусах все углы  $\beta$ , удовлетворяющие условию  $0 < \beta < 720^\circ$ , для каждого из которых его косинус равен  $\cos 31^\circ$ .

$$31^\circ, 329^\circ, 107^\circ, 689^\circ$$

23. (МГУ, физический ф-т, 2008) Найти множество решений неравенства

$$\frac{1}{2} \left( \frac{9x}{\pi} \right)^2 > \cos 3x.$$

Ответ обосновать, используя свойства функций  $y = \frac{1}{2} \left( \frac{9x}{\pi} \right)^2$  и  $y = \cos 3x$ .

$$\left( \infty + \frac{6}{\pi} \right) \cap (0; \infty -)$$

24. (МГУ, химический ф-т, 2008) Решите уравнение

$$\frac{\cos 2x}{1 - \sqrt{2} \sin x} = 0.$$

$$u\pi + \frac{\pi}{2} + u(1-)$$

25. (МГУ, химический ф-т, 2008) Решите неравенство

$$\arccos 3x \leq \arccos \sqrt{6 - 15x}.$$

$$\frac{\pi}{1}$$

26. (МГУ, геологический ф-т, 2008) Найти корни уравнения

$$\frac{\sqrt{3} \sin 2x - 2 \sin \left(\frac{\pi}{3} - x\right) - \cos 2x}{\cos \left(x - \frac{7\pi}{3}\right)} = 0,$$

расположенные на промежутке  $\left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$ .

$\frac{7}{2}$

27. (МГУ, ф-т почвоведения, 2008) Вычислите  $\operatorname{tg} \left(\frac{5\pi}{4} + 2\alpha\right)$ , если  $\cos \alpha = \frac{3}{5}$  и  $-\frac{3\pi}{2} < \alpha < 0$ .

$\frac{21}{18}$

28. (МГУ, социологический ф-т, 2008) Вычислите  $\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha$  при  $\alpha = \frac{\pi}{8}$ .

2

29. (МГУ, ИСАА, 2008) Найти корни уравнения

$$\cos \frac{4\pi}{x} + \sin \frac{8\pi}{x} = 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{x}\right),$$

удовлетворяющие неравенству  $\log_{x+2}(x^2 - 2x + 4) \leq 1$ .

$\frac{1}{8}, \frac{61}{24}, \frac{5}{8}$

30. (МГУ, экономический ф-т, 2008) Решить уравнение

$$\frac{|\sin x|}{\operatorname{tg} x} = \cos 3x.$$

$u\lambda z + \frac{v}{x^3} - u\lambda z + \frac{v}{x} -$

31. (МГУ, ЦЭ, 2008) Вычислите  $\log_2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \log_2(1 - \cos \alpha) - 2 \log_2 \sin \alpha$ , где  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ .

$\frac{2}{1}$

32. (МГУ, мехмат, 2007) Решить уравнение

$$3 \cos x |3 \sin x + \cos x| = \sin x |\cos x - 3 \sin x|.$$

$u\lambda + \frac{5}{x} \operatorname{arctg} \frac{x}{1} - \frac{2}{x}$

33. (МГУ, ВМК, 2007) Найдите все решения уравнения

$$2 \sin \left( x + \frac{7\pi}{25} \right) \cdot \sin \left( 3x + \frac{18\pi}{25} \right) = \cos 4x + 2^{\cos \frac{2\pi}{3}},$$

принадлежащие отрезку  $\left[ -\frac{\pi}{10}; \frac{4\pi}{5} \right]$ .

$$\frac{19\pi}{131} - \frac{200}{\pi}$$

34. (МГУ, физический ф-т, 2007) Решите уравнение

$$\frac{\sin 5x - \sin 3x}{2 \sin x} = 1.$$

$$u\pi + \frac{7}{\pi}$$

35. (МГУ, геологический ф-т, 2007) Решите уравнение:

$$\frac{\cos 2x + \sin x}{\cos x} = \frac{1}{2} \cos x.$$

$$u\pi + \frac{5}{\pi} \text{ и } \frac{1}{1+u}$$

36. (МГУ, ф-т почвоведения, 2007) Решить уравнение

$$\sin^2 11x = \cos^2 17x.$$

$$\frac{9}{u\pi} + \frac{12}{\pi}, \frac{28}{u\pi} + \frac{9\pi}{u}$$

37. (МГУ, филологический ф-т, 2007) Решить уравнение:

$$5 \cos \left( 2x + \frac{\pi}{3} \right) = 4 \sin \left( \frac{5\pi}{6} - x \right) - 1.$$

$$u\pi + \frac{5}{\pi} \text{ и } \frac{1}{1+u} + \frac{9}{\pi} - u\pi + \frac{6}{2\pi}$$

38. (МГУ, экономический ф-т, 2007) Найдите все решения уравнения  $\cos 3x = \sin x$ , удовлетворяющие одновременно двум неравенствам:  $\sin x \geq 0$ ,  $\cos x \leq 0$ .

$$u\pi + \frac{8}{\pi}, u\pi + \frac{1}{\pi}$$

39. (МГУ, мехмат, 2006) Решить уравнение

$$|1 - 2 \sin x + \cos x| + 2 \sin x + 1 = \cos 2x.$$

$$u\pi + \pi$$

40. (МГУ, ВМК, 2006) Найдите все решения неравенства

$$\operatorname{tg} x > \frac{9 - 3 \cos 2x}{3 \sin 2x - 2},$$

удовлетворяющие условию  $\frac{\pi}{8} \leq x < \frac{\pi}{2}$ .

$$\left( \frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{2} \right)$$

41. (МГУ, химический ф-т, 2006) Решить уравнение

$$\cos x + \sin x + \cos 3x + \sin 3x = -\sqrt{6} \cos x.$$

$$u\pi + \frac{\pi}{2} \mp \frac{\pi}{2}, u\pi + \frac{\pi}{2}$$

42. (МГУ, биологический ф-т, 2006) Решить уравнение:

$$3 \cos 2x + 11 \sin x = 7.$$

$$u\pi + \frac{\pi}{2} (1-)$$

43. (МГУ, ф-т почвоведения, 2006) Найдите наименьшее положительное число  $\alpha$ , при котором синус  $\alpha$  градусов равен синусу  $\alpha$  радиан.

$$\frac{\pi + 0.81}{1.801}$$

44. (МГУ, географический ф-т, 2006) Решить уравнение

$$2 \sin x - \frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x - 1 = 0.$$

$$u\pi + \frac{\pi}{2}, u\pi\pi + \pi$$

45. (МГУ, ф-т психологии, 2006) Решить уравнение

$$9 \cos 2x + 9 \cos 6x = 36 \cos x \cos 3x + 140\sqrt{3} \sin x \sin 2x - 162.$$

$$u\pi\pi + \frac{\pi}{2} \cos\pi\pi \mp$$

46. (МГУ, геологический ф-т, 2006) Найдите корни уравнения

$$\frac{\sqrt{3}(\sin 2x + \cos 3x)}{\cos 2x - \sin 3x} = 1,$$

расположенные в интервале  $(1; 2)$ .

$$\frac{0.8}{1.11}$$

47. (МГУ, экономический ф-т, 2006) Найдите все значения  $x$  из интервала  $(8; 12)$ , для которых справедливо равенство

$$2 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} \sin x = \sqrt{6 - 6 \cos \frac{14\pi}{5}}.$$

$\frac{\pi}{2\pi 1}$

48. (МГУ, Московская школа экономики, 2006) Решите уравнение:

$$\frac{\sin 3x}{1 + 2 \cos 2x} = 0.$$

uл

49. (МГУ, ИСАА, 2006) Решите уравнение:

$$3 + 6 \cos 2x + 3 \cos 4x + 2 \cos 6x = 0.$$

uлz +  $\frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{4} \mp \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$

50. (МГУ, ф-т государственного управления, 2006) Решите уравнение

$$\sin |1 - 2x| + \cos x = 0.$$

uлz ±  $\frac{\pi}{2} \mp 1$

51. (МГУ, ВМК, 2005) Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \sin 2(x + y) = 1, \\ xy = 9. \end{cases}$$

$\Gamma '0 '1 - 'z - \neq u '9\text{E} - \frac{\pi}{2} (u\lambda + \frac{\pi}{2}) \sqrt{\frac{\pi}{1} \mp \frac{\pi}{2} + \frac{8}{2}} = u\lambda \text{ аркт} (u\lambda - u\lambda + \frac{\pi}{2}, u\lambda)$

52. (МГУ, ВМК, 2005) Решите уравнение

$$12 \cos 2x + 8 |\sin x| \sqrt{3 + |\sin x| - 3 \cos 2x} = 11.$$

uл +  $\frac{\pi}{1+\sqrt{3}}$  arcsin  $\mp$

53. (МГУ, ВМК, 2005) Решите уравнение

$$\sqrt{\operatorname{ctg} x + 1} = -\sqrt{15} \sin x.$$

uлz + z arcsin + u



54. (МГУ, химический ф-т, 2005) Решите уравнение

$$\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg} 4x + \cos 5x.$$

$$\frac{9}{uv} + \frac{01}{v}$$

55. (МГУ, биологический ф-т, 2005) Решите уравнение

$$\cos x - \sqrt{3} \sin x = \sqrt{2}.$$

$$uvz + \frac{v}{x} \mp \frac{8}{x} -$$

56. (МГУ, ф-т почвоведения, 2005) Решить уравнение:

$$\sin \left( \sqrt{3} \arcsin x \right) = 1.$$

$$\frac{9}{8\sqrt{x}} \operatorname{ctg}$$

57. (МГУ, географический ф-т, 2005) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 12 \sin^2 x - \sin^2 y = 3, \\ 6 \sin x + \cos y = -2. \end{cases}$$

$$(xyz; uv + \frac{9}{x} 1+u(1-))$$

58. (МГУ, ф-т психологии, 2005) Решить уравнение

$$\sqrt{2 \cos^2 x - \sqrt{3}} + \sqrt{2} \sin x = 0.$$

$$uvz + \frac{z1}{x} 11, uvz + \frac{z1}{x} -$$

59. (МГУ, филологический ф-т, 2005) Решить уравнение:

$$2 + \sin x = 3 \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

$$uvz + \frac{z}{x}$$

60. (МГУ, экономический ф-т, 2005) Решите уравнение

$$\sqrt{\log_{\frac{1}{9}} \operatorname{ctg} \frac{2x}{9}} + \sqrt{\log_{\frac{1}{9}} \sin 4x} = 0.$$

$$\frac{7}{uv6} + \frac{8}{x6}$$

61. (МГУ, геологический ф-т, 2005) Найдите наименьший корень уравнения

$$\sqrt{\cos 2x + x - 11} = \sqrt{x - 15 - 5 \cos x}.$$

5π

62. (МГУ, Московская школа экономики, 2005) Найдите все решения уравнения

$$6 \cos \frac{15\pi}{4} \cos \frac{x}{2} - \cos x = 3,$$

принадлежащие отрезку  $[-2; 10,99]$ .

$-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$

63. (МГУ, ИСАА, 2005) Решите уравнение

$$\cos 4x = 4 \cos x \cos 2x - 1$$

$\frac{\pi}{2} + \arccos \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}$

64. (МГУ, ф-т государственного управления, 2005) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x - \sin 1 = 0, \\ \cos x - \cos 1 = 0. \end{cases}$$

$1 + 2\pi n$

65. (МГУ, ф-т глобальных процессов, 2005) Выясните, верно ли следующее утверждение: множество значений функции  $y = \cos 2x - 3 \sin x$  принадлежит отрезку  $[-4; \sqrt{5}]$ . Ответ надо обосновать.

Верно

66. (МФТИ, 2007) Решить уравнение

$$\sin 2x = 2 \sin^3 |x| + \sin 2x \cos x.$$

$(0 \leq x) \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z}), \quad (1 - \sin x) \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z})$

67. (МФТИ, 2007) Решить уравнение

$$\frac{\sin 9x + 4 \sin^2 3x - 3}{1 - \sin 3x} = |\sin 3x|.$$

$\frac{\pi}{2} + 2\pi n$

68. (МФТИ, 2007) Решить уравнение

$$\operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{6} - \frac{2\pi \sin^2 x + \pi}{4 \sin^6 x + 1} \right) - \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4 \sin^6 x + 1} \right) = 0.$$

$$\frac{\pi}{u x} + \frac{\pi}{x}$$

69. (МФТИ, 2007) Решить уравнение

$$9 + \cos 12x = 10 \frac{\cos 6x}{\sin 5x} - 8 \operatorname{ctg}^2 5x.$$

$$u x z + \frac{z}{x} -$$

70. (МФТИ, 2006) Решить уравнение

$$5 \sin 3x + 16 \cos x + 5 \sin x = 12 \cos^3 x.$$

$$u x + \frac{\pi}{4} \operatorname{arctg} x - u x + \frac{\pi}{x} - u x + \frac{\pi}{x}$$

71. (МФТИ, 2006) Решить уравнение

$$\sin 3x \sqrt{\operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{4} + x \right)} = \cos \left( 2x + \frac{\pi}{4} \right) - \cos \left( 4x - \frac{\pi}{4} \right).$$

$$(1 + u z) x + \frac{9}{x} \mp u x + \frac{\pi}{x}, u x$$

72. (МФТИ, 2006) Решить уравнение

$$\frac{\operatorname{tg} 4x \operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} 5x - \operatorname{tg} 4x} = \frac{\operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} 2x}.$$

$$(y z \neq u) \frac{z}{u x}$$

73. (МФТИ, 2006) Решить уравнение

$$\left( \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x \right)^2 = 6 - 2 \cos \left( 2x - \frac{2\pi}{3} \right).$$

$$u x + \frac{\pi}{x}$$

74. (МФТИ, 2005) Решить уравнение

$$(5 \sin x + 12 \cos x)(100 + 48 \cos x - 13 \cos 2x) = 1757.$$

$$u x z + \frac{\pi}{5} \operatorname{arctg} x$$

75. (МФТИ, 2005) Решить уравнение

$$\frac{\sin \frac{3x}{2} \sin \frac{5x}{2}}{\cos x \cos 4x} - \frac{\sin \frac{x}{2} \sin \frac{7x}{2}}{\cos 4x \cos 3x} = \frac{2 \sin x \sin 2x}{\cos x \cos 3x} - \frac{1}{5 \cos x}.$$

$$\pi + \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}$$

76. (МФТИ, 2005) Решить уравнение

$$\frac{\sin^5 x - \cos^5 x}{\sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4}\right)} + \frac{\sin^5 x + \cos^5 x}{\sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{7}{8} - \frac{3}{2} \cos 2x.$$

$$\pi + \frac{\pi}{2}$$

77. (МФТИ, 2004) Решить уравнение

$$\cos 3x + \cos 2x = 3|\cos x| - \cos 4x.$$

$$2\pi + \frac{\pi}{2}, \pi$$

78. (МФТИ, 2004) Решить уравнение

$$\cos x \sqrt{1 + \sin x - 2 \cos x} = \cos x - \sin x.$$

$$\pi + \frac{\pi}{2}, \pi$$

79. (МФТИ, 2004) Решить уравнение

$$\frac{\sin 6x}{|\sin 4x|} = \frac{\cos 3x}{\cos x}.$$

$$\pi + \left(\frac{\pi}{2}\right), \pi + \frac{\pi}{2}$$