

## Тригонометрические преобразования и вычисления

Задачи, связанные с тригонометрическими вычислениями, обычно сводятся к стандартным манипуляциям с тригонометрическими формулами.

### Формулы сложения

Основу тригонометрии составляют *формулы сложения*:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta; \quad (1)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta; \quad (2)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta; \quad (3)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta. \quad (4)$$

Из этих формул, в свою очередь, выводятся многие другие формулы, которые используются в тригонометрических вычислениях и при решении тригонометрических уравнений. А именно:

- формулы тангенса суммы и тангенса разности:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}, \quad \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta};$$

- формулы двойного угла:

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha, \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha, \\ \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}; \end{aligned}$$

- формулы понижения степени:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2};$$

- формулы тройного угла:

$$\begin{aligned} \sin 3\alpha &= 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha, \\ \cos 3\alpha &= 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha, \\ \operatorname{tg} 3\alpha &= \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}. \end{aligned}$$

Вывод данных формул желательно проделать своими руками в качестве упражнения.

ЗАДАЧА. («Ломоносов», 2007) Вычислите

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)(\sin \beta - \cos \beta),$$

если  $\sin(\alpha - \beta) = 0,5$  и  $\cos(\alpha + \beta) = 0,2$ .

РЕШЕНИЕ. Обозначим искомую величину через  $x$ . Раскрывая скобки, получим:

$$x = -(\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta) - (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta).$$

Слагаемые сгруппированы так, чтобы получились формулы (2) и (3):

$$x = -\sin(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = -0,5 - 0,2 = -0,7.$$

ОТВЕТ:  $-0,7$ .

ЗАДАЧА. («Физтех», 2016) Найдите значение выражения

$$\sin^4 \frac{\pi}{24} + \cos^4 \frac{5\pi}{24} + \sin^4 \frac{19\pi}{24} + \cos^4 \frac{23\pi}{24}.$$

РЕШЕНИЕ. Заметим, что

$$\sin \frac{19\pi}{24} = \sin \left( \pi - \frac{5\pi}{24} \right) = \sin \frac{5\pi}{24}, \quad \cos \frac{23\pi}{24} = \cos \left( \pi - \frac{\pi}{24} \right) = -\cos \frac{\pi}{24}.$$

Обозначим для краткости  $\alpha = \frac{\pi}{24}$ ,  $\beta = \frac{5\pi}{24}$ . Искомую сумму обозначим  $S$ . Тогда

$$S = \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha + \sin^4 \beta + \cos^4 \beta.$$

Преобразуем сумму четвёртых степеней синуса и косинуса:

$$\begin{aligned} \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha &= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{2} (2 \sin \alpha \cos \alpha)^2 = \\ &= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \cos 4\alpha}{2} = \frac{3 + \cos 4\alpha}{4}. \end{aligned}$$

Теперь имеем:

$$S = \frac{3 + \cos 4\alpha}{4} + \frac{3 + \cos 4\beta}{4} = \frac{3}{2} + \frac{1}{4} (\cos 4\alpha + \cos 4\beta) = \frac{3}{2} + \frac{1}{4} \left( \cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{5\pi}{6} \right) = \frac{3}{2}.$$

ОТВЕТ:  $\frac{3}{2}$ .

ЗАДАЧА. (МГУ, ф-т почвоведения, 2008) Вычислите  $\operatorname{tg} \left( \frac{3\pi}{4} - 2\alpha \right)$ , если  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$  и  $\frac{\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ .

РЕШЕНИЕ. Поскольку  $\sin \alpha$  положителен и  $\frac{\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ , угол  $\alpha$  расположен во второй четверти:  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ . Значит, его косинус отрицателен:

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\frac{3}{5}.$$

Отсюда  $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{4}{3}$ ,  $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{24}{7}$  и

$$\operatorname{tg} \left( \frac{3\pi}{4} - 2\alpha \right) = \frac{\operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} - \operatorname{tg} 2\alpha}{1 + \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} \operatorname{tg} 2\alpha} = \frac{-1 - \frac{24}{7}}{1 - \frac{24}{7}} = \frac{31}{17}.$$

ОТВЕТ:  $\frac{31}{17}$ .

## Преобразование суммы синусов/косинусов в произведение

Из формул сложения нетрудно получить следующие формулы:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad (5)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad (6)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad (7)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}. \quad (8)$$

ЗАДАЧА. («Физтех», 2016) Найдите значение выражения  $\operatorname{tg} 20^\circ + 4 \sin 20^\circ$ .

РЕШЕНИЕ. Имеем:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 20^\circ + 4 \sin 20^\circ &= \frac{\sin 20^\circ + 4 \sin 20^\circ \cos 20^\circ}{\cos 20^\circ} = \frac{\sin 20^\circ + 2 \sin 40^\circ}{\cos 20^\circ} = \frac{(\sin 20^\circ + \sin 40^\circ) + \sin 40^\circ}{\cos 20^\circ} = \\ &= \frac{2 \sin 30^\circ \cos 10^\circ + \sin 40^\circ}{\cos 20^\circ} = \frac{\cos 10^\circ + \cos 50^\circ}{\cos 20^\circ} = \frac{2 \cos 30^\circ \cos 20^\circ}{\cos 20^\circ} = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

ОТВЕТ:  $\sqrt{3}$ .

ЗАДАЧА. (МГУ, ф-т почвоведения, 2000) Найдите а)  $\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}$ , б)  $\cos(\alpha - \beta)$ , если известно, что выполняются равенства  $\cos \alpha + \cos \beta = 0,3$  и  $\sin \alpha + \sin \beta = -1,1$ .

РЕШЕНИЕ. Имеем:

$$2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 0,3, \quad (9)$$

$$2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = -1,1. \quad (10)$$

Разделив равенство (10) на равенство (9), сразу получаем:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} = -\frac{11}{3}.$$

Теперь возведём равенства (9) и (10) в квадрат и сложим:

$$4 \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} = 1,3 \Rightarrow \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} - 1 = \frac{13}{20} - 1 = -\frac{7}{20}.$$

ОТВЕТ: а)  $-\frac{11}{3}$ ; б)  $-\frac{7}{20}$ .

ЗАДАЧА. Вычислите  $\sin 54^\circ - \sin 18^\circ$ .

РЕШЕНИЕ. Имеем:

$$\begin{aligned} \sin 54^\circ - \sin 18^\circ &= 2 \sin 18^\circ \cos 36^\circ = 2 \cos 36^\circ \cos 72^\circ = \\ &= \frac{4 \sin 36^\circ \cos 36^\circ \cos 72^\circ}{2 \sin 36^\circ} = \frac{2 \sin 72^\circ \cos 72^\circ}{2 \sin 36^\circ} = \frac{\sin 144^\circ}{2 \sin 36^\circ} = \frac{\sin(180^\circ - 36^\circ)}{\sin 36^\circ} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

## Преобразование произведений синусов/косинусов в суммы

Делая в формулах (5)–(8) замену  $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$ ,  $y = \frac{\alpha-\beta}{2}$ , приходим к следующим формулам:

$$\begin{aligned}2 \sin x \cos y &= \sin(x+y) + \sin(x-y), \\2 \cos x \cos y &= \cos(x+y) + \cos(x-y), \\2 \sin x \sin y &= \cos(x-y) - \cos(x+y),\end{aligned}$$

ЗАДАЧА. Вычислите

$$\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}.$$

РЕШЕНИЕ. Пусть  $S$  — искомая сумма. Имеем:

$$\begin{aligned}2 \sin \frac{\pi}{7} \cdot S &= 2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} + 2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} + 2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7} = \\&= \left( \sin \frac{3\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} \right) + \left( \sin \frac{5\pi}{7} - \sin \frac{3\pi}{7} \right) + \left( \sin \pi - \sin \frac{5\pi}{7} \right) = -\sin \frac{\pi}{7},\end{aligned}$$

откуда  $S = -1/2$ .

## Задачи

1. («Ломоносов», 2007) Вычислите

$$(\sin \alpha - \cos \alpha)(\sin \beta - \cos \beta),$$

если  $\sin(\alpha + \beta) = 0,8$  и  $\cos(\alpha - \beta) = 0,3$ .

9'0

2. Найдите  $\sin 2\alpha$ , если  $\sin \alpha + \cos \alpha = 1,3$ .

69'0

3. («Физтех», 2015, 10) Известно, что  $\sin y = \frac{3}{2} \sin x + \frac{2}{3} \cos x$ ,  $\cos y = \frac{2}{3} \sin x + \frac{3}{2} \cos x$ . Найдите  $\sin 2x$ .

24'19

4. Докажите тождество:

$$\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = \frac{5 + 3 \cos 4\alpha}{8}.$$

5. («Физтех», 2016, 10) Найдите значение выражения

$$\sin^4 \frac{5\pi}{24} + \cos^4 \frac{7\pi}{24} + \sin^4 \frac{17\pi}{24} + \cos^4 \frac{19\pi}{24}.$$

7'19

6. («Физтех», 2014) Известно, что  $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = 16$ ,  $\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = 18$ . Найдите  $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ .

141

7. («Физтех», 2016, 10) Известно, что  $\operatorname{tg}(2\alpha - \beta) + 6 \operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg} \beta = 0$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = 2$ . Найдите  $\operatorname{ctg} \beta$ .

$\frac{7}{1}$  или 1

8. («Физтех», 2017, 11) Известно, что числа  $x, y, z$  образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию с разностью  $\alpha = \arccos\left(-\frac{2}{5}\right)$ , а числа  $3 + \sin x, 3 + \sin y, 3 + \sin z$  образуют в указанном порядке непостоянную геометрическую прогрессию. Найдите  $\sin y$ .

$\frac{01}{1}$

9. («Физтех», 2017, 11) Известно, что числа  $x, y, z$  образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию с разностью  $\alpha = \arccos\left(-\frac{3}{7}\right)$ , а числа  $\frac{1}{\cos x}, \frac{7}{\cos y}, \frac{1}{\cos z}$  также образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Найдите  $\cos^2 y$ .

$\frac{81}{01}$

10. Объясните, почему верно равенство  $\cos 54^\circ = \sin 36^\circ$ . Исходя из него, вычислите  $\sin 18^\circ$ .

$\frac{7}{1-2^{\wedge}}$

11. Покажите, что:

$$\text{а) } \cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}; \quad \text{б) } \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{8}.$$

12. Вычислите

$$\frac{2 \cos 40^\circ - \cos 20^\circ}{\sin 20^\circ}.$$

8^{\wedge}

13. («Физтех», 2016, 10) Найдите значение выражения  $\operatorname{ctg} 50^\circ - 4 \cos 50^\circ$ .

8^{\wedge}-

14. Докажите:

$$\begin{aligned} \text{а) } \cos \alpha + \cos 2\alpha + \dots + \cos n\alpha &= \frac{\sin \frac{n\alpha}{2} \cos \frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}; \\ \text{б) } \sin \alpha + \sin 2\alpha + \dots + \sin n\alpha &= \frac{\sin \frac{n\alpha}{2} \sin \frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

15. (ОММО, 2015, 11) Для  $x = \frac{\pi}{2n}$  найдите значение суммы

$$\sin^2 x + \sin^2 2x + \dots + \sin^2 nx.$$

$\frac{z}{1+u}$

16. («Ломоносов», 2015) Вычислить:

$$10\sqrt{2} \left( \sin^3 \frac{7\pi}{32} \cos \frac{21\pi}{32} + \cos^3 \frac{7\pi}{32} \sin \frac{21\pi}{32} \right) \cos \frac{7\pi}{8}.$$

91,3,75

17. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 10–11) Что больше:

$$\operatorname{tg} 9^\circ - \operatorname{tg} 63^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ \quad \text{или} \quad \frac{200}{157} \pi ?$$

Второе

18. («Курчатов», 2016, 11) Найдите наименьшее натуральное  $n$  такое, что  $\sin n^\circ = \sin(2016n^\circ)$ .

72

19. (ОММО, 2017) Сравните числа  $\frac{\sin 2016^\circ}{\sin 2017^\circ}$  и  $\frac{\sin 2018^\circ}{\sin 2019^\circ}$ .

Второе больше

20. (Всеросс., 2017, ШЭ, 11) Приведите пример числа  $x$ , для которого выполняется равенство

$$\sin 2017x - \operatorname{tg} 2016x = \cos 2015x.$$

Ответ обоснуйте.

21. (Всеросс., 2018, МЭ, 11.2) Существует ли треугольник, у которого сумма косинусов внутренних углов равна 1?

22. (ОММО, 2010) Найдите сумму:

$$\frac{\sin \frac{\pi}{3}}{2} + \frac{\sin \frac{2\pi}{3}}{2^2} + \frac{\sin \frac{3\pi}{3}}{2^3} + \dots + \frac{\sin \frac{2010\pi}{3}}{2^{2010}}.$$

$\left( \frac{\operatorname{tg} 2\pi}{1} - 1 \right) \frac{\pi}{\sqrt{e}}$

23. («Покори Воробьёвы горы!», 2012) Что меньше:  $\sin 1$  или  $\cos \frac{1}{2^1} \cdot \cos \frac{1}{2^2} \cdot \cos \frac{1}{2^3} \cdot \dots \cdot \cos \frac{1}{2^{2012}}$ ?

sin меньше

24. (Всеросс., 2014, РЭ, 11) Дан выпуклый 7-угольник. Выбираются четыре произвольных его угла и вычисляются их синусы, от остальных трёх углов вычисляются косинусы. Оказалось, что сумма таких семи чисел не зависит от изначального выбора четырёх углов. Докажите, что у этого 7-угольника найдутся четыре равных угла.

25. (МГУ, централизованный экзамен, 2008) Вычислите  $\log_2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \log_2(1 - \cos \alpha) - 2 \log_2 \sin \alpha$ , где  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ .

2  
1

26. (МГУ, физический ф-т, 2008) Указать в градусах все углы  $\beta$ , удовлетворяющие условию  $0 < \beta < 720^\circ$ , для каждого из которых его косинус равен  $\cos 31^\circ$ .

0689 ' 0168 ' 0678 ' 018

27. (МГУ, экономич. ф-т, 2006) Найдите все значения  $x$  из интервала  $(8; 12)$ , для которых справедливо равенство

$$2 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} \sin x = \sqrt{6 - 6 \cos \frac{14\pi}{5}}.$$

0  
1381

28. (МГУ, ф-т гос. управления, 2010) Найдите  $\cos \alpha$  и  $\operatorname{tg} 2\alpha$ , если известно, что  $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ , а  $\cos(\alpha - \frac{\pi}{3}) < 0$ .

0  
2^2^4^ - ' 0^2^2^ -

29. (МГУ, ВМК, 1994) Найти  $\cos(2(\alpha - \frac{\pi}{4}))$ , если  $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{\sqrt{7}}$ .

0  
2^2^ -

30. (МГУ, ф-т почвоведения, 1996) Найти  $\cos(\alpha + \frac{\pi}{3})$ , если  $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$  и  $\operatorname{tg} \alpha > 0$ .

01  
4^2^2^

31. (МГУ, ф-т почвоведения, 2004) Вычислите  $\sin 255^\circ$ .

0  
2^2^+2^2^ -

32. (МГУ, физический ф-т, 1987) Известно, что  $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ ,  $\pi < \alpha < \frac{4\pi}{3}$ . Найти  $\cos \alpha$  и  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ .

0  
2^2^ - и 0^2^ -

33. (МГУ, ф-т почвоведения, 1998) Найдите  $\cos \frac{\alpha}{2}$ , если известно, что  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$  и  $\pi < \alpha < 2\pi$ . Установите без помощи таблиц и калькулятора, какое из чисел больше:  $|\cos \frac{\alpha}{2}|$  или  $\frac{2}{7}$ .

01^2^  
2^2^: первое число больше

34. (МГУ, ф-т почвоведения, 2002) Вычислить  $\cos \frac{5\pi}{8}$ .

0  
2^2^2^ -

35. (МГУ, социологич. ф-т, 2008) Вычислите  $\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha$  при  $\alpha = \frac{\pi}{8}$ .

2

36. (МГУ, геологич. ф-т, 2000) Вычислить  $\operatorname{tg} 8x$ , если  $\operatorname{tg} 2x = \frac{1}{4}$ .

161  
240

37. (МГУ, ф-т почвоведения, 2002) Найти  $\operatorname{tg} 3\alpha$ , если  $\sin \alpha = 2 \cos \alpha$ .

$\frac{11}{7}$

38. (МГУ, ф-т психологии, 1986) Найти  $\operatorname{tg}^2 2\alpha$ , если  $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{6}$ .

$\frac{121}{80}$

39. (МГУ, ф-т почвоведения, 2008) Вычислите  $\operatorname{tg} \left( \frac{5\pi}{4} + 2\alpha \right)$ , если  $\cos \alpha = \frac{3}{5}$  и  $-\frac{3\pi}{2} < \alpha < 0$ .

$\frac{41}{38}$

40. (МГУ, ф-т почвоведения, 2000) Найти  $\operatorname{tg} 2\alpha$ , если  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$  и  $\sin 4\alpha > 0$ .

$\frac{4}{17}$

41. (МГУ, геологич. ф-т, 1984) Найти  $\sin \frac{\alpha}{2}$ , если  $\cos 2\alpha \leq -\frac{7}{8}$  и  $\cos \alpha \leq -\frac{1}{4}$ .

$\frac{8}{9}$

42. (МГУ, геологич. ф-т, 1984) Найти  $\sin \alpha$ , если  $\sin 2\alpha \geq \frac{3}{5}$  и  $\operatorname{tg} \alpha \leq \frac{1}{3}$ .

$\frac{01}{1}$

43. (МГУ, мехмат, 1994) Число  $x$  удовлетворяет условиям  $\operatorname{tg} 2x = -\frac{3}{4}$  и  $\sin 2x > 0$ . Обязательно ли при этих условиях определено выражение  $\log_{\operatorname{tg} \frac{\pi}{6}} \operatorname{tg} x$  и чему оно тогда равно?

2

44. (МГУ, ф-т почвоведения, 2000) Найдите а)  $\operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{2}$ , б)  $\cos(\alpha + \beta)$ , если известно, что выполняются равенства  $\cos \alpha - \cos \beta = -0,7$  и  $\sin \alpha + \sin \beta = 0,9$ .

$\frac{07}{2} \left( 9 ; \frac{6}{2} \right)$

45. (МГУ, геологич. ф-т, 2004) Какие значения может принимать  $\sin x$ , если

$$\sin \left( x + \frac{\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} ?$$

$\frac{5}{1}$  или  $1$

46. (МГУ, ф-т почвоведения, 2006) Найдите наименьшее положительное число  $\alpha$ , при котором синус  $\alpha$  градусов равен синусу  $\alpha$  радиан.

$\frac{180}{1}$

47. (МГУ, экономич. ф-т, 1992) Вычислить  $\log_{\frac{9}{5}} \left| \sin \left( \frac{\pi}{4} - \alpha \right) \right| + \log_{\frac{9}{5}} \left| \cos \left( 3\alpha - \frac{\pi}{4} \right) \right|$ , если известно, что  $\sin \alpha - \cos \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$ .

1



48. (МГУ, мехмат, 2005, устный экз.) Найдите наименьшее значение функции  $f$ , определённой на множестве натуральных чисел и удовлетворяющей равенствам

$$f(1) = \cos 2, \quad f(n+1) = f(n) \cdot \cos 1 - \sqrt{1 - (f(n))^2} \cdot \sin 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

□ cos

49. (МФТИ, 1995) Найдите наименьшее натуральное число  $n$ , при котором выполнено равенство

$$\cos(n^\circ + 20^\circ) - \cos(n^\circ + 80^\circ) - \sin(n^\circ + 80^\circ) + \sin 15^\circ = 0.$$

□ 232

50. (МГУ, мехмат, 2001) Можно ли подобрать числа  $A, B, \varphi, \psi$  так, чтобы выражение

$$\left(\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2\right)^2 + A \cos(x + \varphi) + B \sin(2x + \psi)$$

принимало при всех  $x$  одно и то же значение  $C$ ? Если да, то какие значения может принимать константа  $C$ ?

□  $\frac{2}{9} = C$  можно

51. (МГУ, мехмат, 2002) Найдите дроби

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma} \quad \text{и} \quad \frac{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}{\sin(\alpha + \beta + \gamma)},$$

если числа  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  выбраны так, что обе дроби положительны и одна втрое больше другой.

□  $\frac{3}{2}, 2$

52. (МГУ, мехмат, 2000) Найдите  $\frac{\sin(\alpha+\gamma) \sin(\beta+\gamma)}{\cos \gamma \cos(\alpha+\beta+\gamma)}$ , если  $\frac{\sin(\alpha+\gamma) \sin(\beta+\gamma)}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{4}{9}$ .

□  $\frac{5}{4}$

53. (МГУ, ВМК, 2007) Какие значения может принимать  $\cos(\alpha - \beta + \gamma)$ , если при этих  $\alpha, \beta, \gamma$  многочлен от  $x$

$$x^4 + 2 \cdot 3^{2 \cos \alpha} x^2 + x \cdot \sqrt{3^{2 - \cos \beta} - 3 \sin \gamma} + 4 \cos^2 \beta - \sin^2 \gamma$$

является квадратом некоторого многочлена относительно  $x$ ?

□  $\frac{7}{91} \sqrt{7}$