

Обратные тригонометрические функции

Перед этим листком следует повторить статью «[Введение в аркфункции](#)», в которой приводятся определения арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса, а также графики этих функций и примеры решения простейших задач.

ЗАДАЧА. Докажите, что для любого $x \in [-1; 1]$ справедливо равенство

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

РЕШЕНИЕ. Пусть $\alpha = \arcsin x$; это означает по определению, что $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ и $\sin \alpha = x$. Согласно основному тригонометрическому тождеству

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha,$$

и поскольку косинус неотрицателен на отрезке $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, имеем отсюда

$$\cos \alpha = +\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}.$$

Остаётся подставить сюда $\alpha = \arcsin x$ и $\sin \alpha = x$:

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2},$$

что и требовалось.

ЗАДАЧА. Докажите, что

$$2 \operatorname{arctg} 2 + \arcsin \frac{4}{5} = \pi. \quad (1)$$

РЕШЕНИЕ. Обозначим левую часть (1) через $\gamma = 2\alpha + \beta$, где $\alpha = \operatorname{arctg} 2$ и $\beta = \arcsin \frac{4}{5}$. Имеем:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \cdot 2}{1 - 4} = -\frac{4}{3}; \\ \operatorname{tg} \beta &= \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\frac{4}{5}}{\sqrt{1 - \frac{16}{25}}} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg}(2\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} \beta} = \frac{-\frac{4}{3} + \frac{4}{3}}{1 + \frac{16}{9}} = 0.$$

Определим теперь интервал, в котором расположен угол γ . Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 < \operatorname{arctg} 2 = \alpha < \frac{\pi}{2} &\Rightarrow \frac{\pi}{2} < 2\alpha < \pi; \\ \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{4}{5} < \frac{\sqrt{3}}{2} &\Rightarrow \frac{\pi}{4} < \arcsin \frac{4}{5} = \beta < \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} < 2\alpha + \beta < \pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{3\pi}{4} < \gamma < \frac{4\pi}{3}.$$

Из полученной оценки и равенства $\operatorname{tg} \gamma = 0$ заключаем, что $\gamma = \pi$. Равенство (1) тем самым доказано.

ЗАДАЧА. (МГУ, ВМК, 1999) Известно, что $\operatorname{ctg} \alpha = 1$. Сравнить

$$\arccos \left(-\sqrt{-\sqrt{2} \sin \alpha - \frac{1}{4}} \right) \quad \text{и} \quad \frac{19\pi}{24}.$$

РЕШЕНИЕ. Если $\operatorname{ctg} \alpha = 1$, то $\alpha = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$ или $\alpha = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$). В первом случае $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, что невозможно, так как под корнем оказывается отрицательное число. Во втором случае $\sin \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, и тогда

$$\arccos \left(-\sqrt{-\sqrt{2} \sin \alpha - \frac{1}{4}} \right) = \arccos \left(-\sqrt{1 - \frac{1}{4}} \right) = \arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{5\pi}{6} = \frac{20\pi}{24} > \frac{19\pi}{24}.$$

ОТВЕТ: Первое число больше.

ЗАДАЧА. («Покори Воробьёвы горы!», 2013) Выясните, какое из чисел больше:

$$\operatorname{arctg} (\sqrt{2} + \sqrt{3}) + \operatorname{arcctg} (\sqrt{2} - \sqrt{3}) \quad \text{или} \quad \frac{5\sqrt{7}}{4}.$$

РЕШЕНИЕ. Пусть $\alpha = \operatorname{arctg} (\sqrt{2} + \sqrt{3})$; тогда $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3} > 0$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Пусть также $\beta = \operatorname{arcctg} (\sqrt{2} - \sqrt{3})$; тогда $\operatorname{ctg} \beta = \sqrt{2} - \sqrt{3} < 0$ и $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$. Имеем:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\operatorname{ctg} \beta} = \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{(\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{2} + \sqrt{3})} = -(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = -\operatorname{tg} \alpha.$$

Следовательно, $\beta = \pi - \alpha$, то есть $\alpha + \beta = \pi$. Остаётся сравнить π и $\frac{5\sqrt{7}}{4}$. Имеем:

$$\frac{5\sqrt{7}}{4} = \sqrt{\frac{175}{16}} > \sqrt{\frac{168}{16}} = \sqrt{10,5} > \sqrt{10,24} = 3,2 > \pi.$$

ОТВЕТ: Второе число больше.

ЗАДАЧА. (МФТИ, 1991) Решить уравнение

$$\arcsin 5x = \operatorname{arcctg} 6x.$$

РЕШЕНИЕ. По определению арксинуса данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 5x = \sin(\operatorname{arcctg} 6x), \\ -\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{arcctg} 6x \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (2)$$

Поскольку арккотангенс принимает значения от 0 до π , синус арккотангенса положителен:

$$\sin(\operatorname{arcctg} 6x) = +\sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2(\operatorname{arcctg} 6x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 36x^2}}.$$

Поэтому система (2) равносильна системе

$$\begin{cases} 5x = \frac{1}{\sqrt{1 + 36x^2}}, \\ \operatorname{arcctg} 6x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 36 \cdot 25x^4 + 25x^2 - 1 = 0, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Делая в полученном уравнении замену $t = 5x^2$, приходим к уравнению $36t^2 + 5t - 1 = 0$, корни которого $t_1 = -\frac{1}{4}$ и $t_2 = \frac{1}{9}$. Корню t_1 не соответствуют никакие значения x . Корень t_2 даёт два значения $x = \pm \frac{1}{3\sqrt{5}}$, из которых годится только положительное.

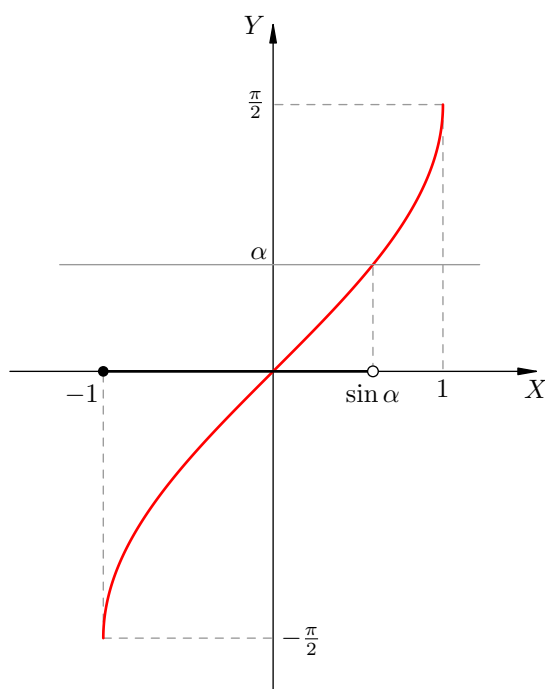
ОТВЕТ: $\frac{1}{3\sqrt{5}}$.

ЗАДАЧА. Для каждого значения параметра α решите неравенство

$$\arcsin x < \alpha. \tag{3}$$

РЕШЕНИЕ. Множество значений арксинуса есть отрезок $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, поэтому если $\alpha \leq -\frac{\pi}{2}$, то неравенство (3) не имеет решений, а если $\alpha > \frac{\pi}{2}$, то неравенству удовлетворяют все $x \in [-1; 1]$.

Пусть теперь $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Имеется ровно одно значение $x = \sin \alpha$, для которого выполнено равенство $\arcsin x = \alpha$. Ввиду монотонного возрастания функции $y = \arcsin x$ все решения неравенства (3) даются формулой $-1 \leq x < \sin \alpha$ (см. рисунок).



ОТВЕТ: Если $\alpha \leq -\frac{\pi}{2}$, то решений нет; если $-\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, то $-1 \leq x < \sin \alpha$; если $\alpha > \frac{\pi}{2}$, то $-1 \leq x \leq 1$.

ЗАДАЧА. («Покори Воробьёвы горы!», 2012) Решите неравенство

$$2 \arcsin(x + 1) + \arcsin(4x^2 + 8x + 4) < 0.$$

РЕШЕНИЕ. Делая замену $t = -x - 1$ и пользуясь нечётностью арксинуса, приходим к неравенству

$$\arcsin 4t^2 < 2 \arcsin t. \tag{4}$$

Оба арксинуса определены при условиях

$$\begin{cases} 4t^2 \leq 1, \\ -1 \leq t \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}.$$

При полученных t имеем оценку $-\frac{\pi}{3} \leq 2 \arcsin t \leq \frac{\pi}{3}$, поэтому неравенство (4) равносильно неравенству (см. предыдущую задачу)

$$-1 \leq 4t^2 < \sin(2 \arcsin t) \Leftrightarrow 4t^2 < 2t\sqrt{1-t^2} \Leftrightarrow t(2t - \sqrt{1-t^2}) < 0.$$

Если $t < 0$, то оба множителя отрицательны и данное неравенство не имеет решений. При $t > 0$ оно равносильно неравенству

$$2t - \sqrt{1-t^2} < 0 \Leftrightarrow 4t^2 < 1-t^2 \Leftrightarrow 0 < t < \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Поскольку $\frac{1}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2}$, интервал $(0; \frac{1}{\sqrt{5}})$ является множеством решений неравенства (4). Остаётся сделать обратную замену:

$$0 < -x - 1 < \frac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow -\frac{5+\sqrt{5}}{5} < x < -1.$$

ОТВЕТ: $(-\frac{5+\sqrt{5}}{5}; -1)$

В некоторых задачах фигурируют функции $\arcsin(\sin x)$ и $\arccos(\cos x)$, свойства которых желательно знать до начала олимпиады.

ЗАДАЧА. Построить график функции $y = \arcsin(\sin x)$.

РЕШЕНИЕ. Каково бы ни было число $x \in \mathbb{R}$, наша функция сопоставляет ему такое число $y \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, что $\sin y = \sin x$.

Если, например, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, то $y = x$. В самом деле, равенство синусов углов на промежутке $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ влечёт равенство самих углов.

Пусть, далее, $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$. Тогда из тождества $\sin(\pi - x) = \sin x$ и оценки $-\frac{\pi}{2} \leq \pi - x \leq \frac{\pi}{2}$ получаем, что $y = \pi - x$.

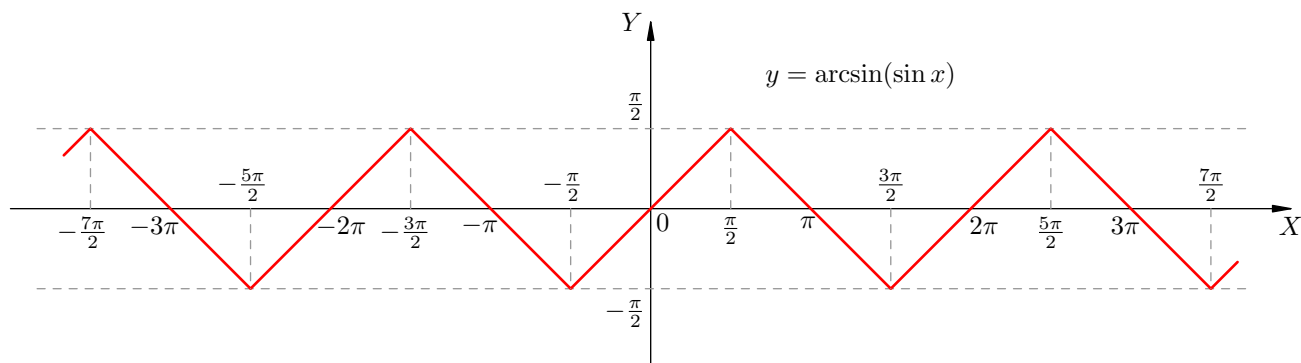
Вообще, пусть $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$). Тогда $-\frac{\pi}{2} \leq x - 2\pi n \leq \frac{\pi}{2}$ и $\sin(x - 2\pi n) = \sin x$. Поэтому $y = x - 2\pi n$.

Далее, пусть $\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$. Тогда $-\frac{\pi}{2} \leq \pi - (x - 2\pi n) \leq \frac{\pi}{2}$ и $\sin(\pi - x + 2\pi n) = \sin x$. Поэтому $y = \pi - x + 2\pi n$.

Таким образом, имеем:

$$y = \begin{cases} x - 2\pi n, & \text{если } -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n; \\ \pi - x + 2\pi n, & \text{если } \frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z}). \end{cases}$$

Данная функция является кусочно-линейной — её график составлен из отрезков прямых, угловые коэффициенты которых поочерёдно принимают значения 1 и -1 . Этот график приведён на рисунке.



ЗАДАЧА. Построить график функции $y = \arccos(\cos x)$.

РЕШЕНИЕ. Любому числу $x \in \mathbb{R}$ данная функция сопоставляет такое число $y \in [0; \pi]$, что $\cos y = \cos x$. Далее рассуждаем аналогично предыдущей задаче.

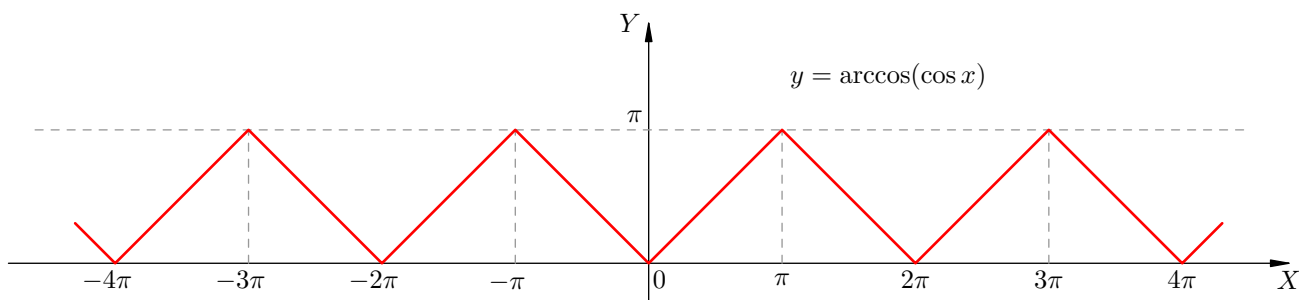
Если $0 \leq x \leq \pi$, то $y = x$, так как равенство косинусов на отрезке $[0; \pi]$ влечёт равенство самих углов. Если $\pi \leq x \leq 2\pi$, то из тождества $\cos(2\pi - x) = \cos x$ и оценки $0 \leq 2\pi - x \leq \pi$ получаем $y = 2\pi - x$.

Вообще, если $2\pi n \leq x \leq \pi + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$), то из оценки $0 \leq x - 2\pi n \leq \pi$ и равенства $\cos(x - 2\pi n) = \cos x$ получаем $y = x - 2\pi n$. Если же $\pi + 2\pi n \leq x \leq 2\pi + 2\pi n$, то соотношения $0 \leq 2\pi - (x - 2\pi n) \leq \pi$ и $\cos(2\pi - x + 2\pi n) = \cos x$ дают $y = 2\pi - x + 2\pi n$.

Итак,

$$y = \begin{cases} x - 2\pi n, & \text{если } 2\pi n \leq x \leq \pi + 2\pi n; \\ 2\pi - x + 2\pi n, & \text{если } \pi + 2\pi n \leq x \leq 2\pi + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z}). \end{cases}$$

График этой функции изображён на рисунке.



Данный график можно получить сдвигом графика функции $y = \arcsin(\sin x)$, если воспользоваться тождеством

$$\arccos(\cos x) = \frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Выполните этот сдвиг самостоятельно, предварительно убедившись в справедливости приведённого тождества.

ЗАДАЧА. («Ломоносов», 2012) Найдите все целочисленные решения уравнения

$$\left| \arcsin(\cos 4) - \frac{\pi x}{2} \right| = 4.$$

РЕШЕНИЕ. С учётом неравенства $\pi < 4 < 2\pi$ имеем:

$$\arcsin(\cos 4) = \frac{\pi}{2} - \arccos(\cos 4) = \frac{\pi}{2} - (2\pi - 4) = 4 - \frac{3\pi}{2}.$$

Тогда наше уравнение переписывается в виде

$$\left| 4 - \frac{\pi(x+3)}{2} \right| = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - \frac{\pi(x+3)}{2} = 4, \\ 4 - \frac{\pi(x+3)}{2} = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3, \\ x = \frac{16}{\pi} - 3. \end{cases}$$

Второй корень не является целым числом.

ОТВЕТ: $x = -3$.

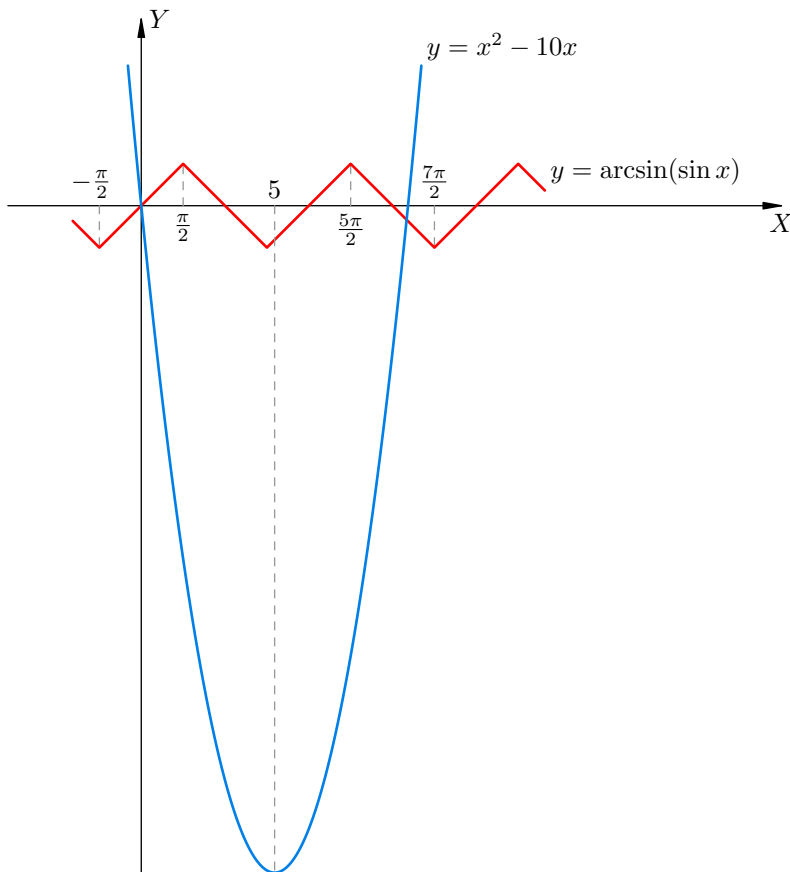
ЗАДАЧА. (МГУ, ВКНМ, 2000) Решите уравнение

$$x^2 = \arcsin(\sin x) + 10x.$$

РЕШЕНИЕ. Перепишем уравнение в виде

$$x^2 - 10x = \arcsin(\sin x)$$

и изобразим графики функций $f(x) = x^2 - 10x$ и $g(x) = \arcsin(\sin x)$. Графическая картина прояснит нам, как строить дальнейшие рассуждения.



Рассмотрим промежуток $I_1 = [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Функция $f(x)$ монотонно убывает при $x \leq 5$ и, в частности, на I_1 ; при этом $f(-\frac{\pi}{2}) > 0$ и $f(\frac{\pi}{2}) < 0$. Функция $g(x)$ монотонно возрастает на I_1 (поскольку $g(x) = x$ на этом промежутке); при этом $g(-\frac{\pi}{2}) < 0$ и $g(\frac{\pi}{2}) > 0$. Следовательно, уравнение $f(x) = g(x)$ имеет единственный корень на I_1 . Легко проверить, что это $x = 0$.

Рассмотрим промежуток $I_2 = [\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}]$. Функция $f(x)$ монотонно возрастает при $x \geq 5$ и, в частности, на I_2 ; при этом $f(\frac{5\pi}{2}) = \frac{5\pi}{2}(\frac{5\pi}{2} - 10) < 0$ и $f(\frac{7\pi}{2}) = \frac{7\pi}{2}(\frac{7\pi}{2} - 10) > 0$. Функция $g(x)$ монотонно убывает на I_2 (поскольку $g(x) = 3\pi - x$ на этом промежутке); при этом $g(\frac{5\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} > 0$ и $g(\frac{7\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2} < 0$. Следовательно, уравнение $f(x) = g(x)$ имеет единственный корень на I_2 . Найдём его:

$$x^2 - 10x = 3\pi - x \quad \Rightarrow \quad x^2 - 9x - 3\pi = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{9 + \sqrt{81 + 12\pi}}{2}$$

(второй корень квадратного уравнения отрицателен и является посторонним).

Вне промежутков I_1 и I_2 уравнение $f(x) = g(x)$ не имеет корней. В самом деле, если $x < -\frac{\pi}{2}$, то $f(x) > f(-\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{4} + 5\pi > \frac{\pi}{2}$. Если $x > \frac{7\pi}{2}$, то $f(x) > f(\frac{7\pi}{2}) = \frac{49\pi^2}{4} - 35\pi > \frac{\pi}{2}$. Если же

$\frac{\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{2}$, то $f(x) < f\left(\frac{5\pi}{2}\right) = \frac{25\pi^2}{4} - 25\pi < -\frac{\pi}{2}$. Следовательно, во всех этих случаях $f(x)$ не может равняться $g(x)$.

ОТВЕТ: $0; \frac{9+\sqrt{81+12\pi}}{2}$.

ЗАДАЧА. («Покори Воробьёвы горы!», 2013) Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством

$$\sqrt{\arcsin x} \leq \sqrt{\arccos y}.$$

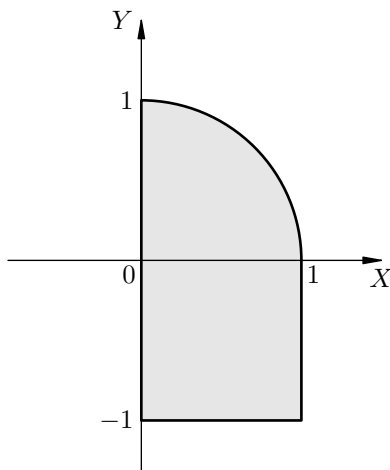
РЕШЕНИЕ. Неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \arcsin x \geq 0, \\ \arcsin x \leq \arccos y. \end{cases} \quad (5)$$

Множеством решений первого неравенства (5) является отрезок $0 \leq x \leq 1$. Если $y \in [-1; 0]$, то $\frac{\pi}{2} \leq \arccos y \leq \pi$, и тогда второе неравенство (5) выполнено при всех $x \in [0; 1]$. Если же $y \in [0; 1]$, то $0 \leq \arccos y \leq \frac{\pi}{2}$, и тогда при $x \in [0; 1]$ второе неравенство (5) равносильно

$$x \leq \sin(\arccos y) = \sqrt{1 - y^2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 1.$$

В результате имеем объединение квадрата и четверти круга (см. рисунок).



Сторона квадрата и радиус круга равны 1, поэтому искомая площадь равна $1 + \frac{\pi}{4}$.

Задачи

1. Докажите, что для любого $x \in [-1; 1]$ справедливо равенство

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

2. Докажите равенства

$$\begin{aligned} \text{а) } \cos(\operatorname{arctg} x) &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in \mathbb{R}; & \text{б) } \sin(\operatorname{arctg} x) &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in \mathbb{R}; \\ \text{в) } \operatorname{tg}(\arcsin x) &= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1; 1); & \text{г) } \operatorname{tg}(\arccos x) &= \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad x \in [-1; 0) \cup (0; 1]. \end{aligned}$$

3. («Покори Воробьёвы горы!», 2018, 10–11) Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством

$$\arcsin(2x) + \arccos(2x) \geq \frac{\pi}{4} \cdot (y^2 - 2).$$

4

4. («Покори Воробьёвы горы!», 2012) Маше нужно было вычислить значение выражения $\sin(2 \arccos \alpha)$ при заданном значении α . Однако Маша по невнимательности вычислила значение выражения $\cos(2 \arcsin \alpha)$, но при том же значении α , причём вычислила верно. Оказалось, что Машин ответ совпал с правильным ответом для исходного выражения. Каким при этом могло быть число α (укажите все возможные значения)?

$$\frac{2}{2^{\wedge}+2^{\wedge}}; \frac{2}{2^{\wedge}-2^{\wedge}}$$

5. Докажите, что

$$\text{а) } 2 \operatorname{arctg} 4 + \arccos \frac{15}{17} = \pi; \quad \text{б) } 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}.$$

6. (МГУ, мехмат, 1999, устный экз.) Вычислить

$$\operatorname{arctg} 8 + \operatorname{arctg} \frac{19}{22} + \operatorname{arctg} \left(-\frac{3}{2} \right).$$

2
π3

7. («Покори Воробьёвы горы!», 2018, 10–11) Вычислите

$$\operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg} \frac{2-1}{2^3-1} + \operatorname{arctg} \frac{3-1}{3^3-1} + \dots + \operatorname{arctg} \frac{100-1}{100^3-1} \right).$$

203
69

8. («Покори Воробьёвы горы!», 2018, 10–11) Решите уравнение

$$\left(\arcsin \frac{3}{5} - \arccos \frac{4}{5} \right) \cdot x + \pi = 2 \operatorname{arctg} 3 + \operatorname{arctg} \frac{3}{4}.$$

x ∈ ℝ

9. (МГУ, ВМК, 1999) Известно, что $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$. Сравнить

$$\arccos \left(-\sqrt{-3 \cos \alpha - 1} \right) \quad \text{и} \quad \frac{19\pi}{24}.$$

Второе число больше

10. («Покори Воробьёвы горы!», 2013) Выясните, какое из чисел больше:

$$\operatorname{arctg}(\sqrt{3} + 2) + \operatorname{arctg}(\sqrt{3} - 2) \quad \text{или} \quad \frac{7\sqrt{3}}{4}.$$

Первое число больше

11. («Ломоносов», 2016) Найдите все решения уравнения

$$\operatorname{arctg}^2 x = 3 \operatorname{arctg}^2 x + \frac{\pi^2}{36}.$$

$\frac{\pi}{6}$

12. (ММО, 2016, 11) Существует ли такое значение x , что выполняется равенство

$$\arcsin^2 x + \arccos^2 x = 1?$$

Нет

13. («Покори Воробьёвы горы!», 2015) Что больше: $2 \sin \frac{5\pi}{16} \cos \frac{\pi}{16}$ или сумма корней уравнения $|3 \arccos x| = |\arcsin x|$?

Первое число больше

14. (МГУ, ВМК, 2005) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \arccos \frac{x+y}{4} = \arccos \frac{5xy}{24}, \\ x^2 + y^2 = 13. \end{cases}$$

$\left(\frac{01}{18E\wedge-31-}, \frac{01}{18E\wedge+31-}\right), \left(\frac{01}{18E\wedge+31-}, \frac{01}{18E\wedge-31-}\right)$

15. (МГУ, ф-т почвоведения, 2005) Решите уравнение

$$\sin(\sqrt{3} \arcsin x) = 1.$$

$\frac{9}{\pi} \pi$

16. («Покори Воробьёвы горы!», 2016) Решите уравнение

$$\left(\sqrt{2} \sin 3x + \sqrt{2 + \cos 3x}\right) \left(2 \cos(\sqrt{2} \arcsin x) - 1\right) = 0.$$

$\frac{2}{x} \pi \mp \frac{6}{x} - \frac{9}{x}$

17. (МГУ, ИСАА, 2002) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \arccos 2y + \arcsin 3x = \frac{\pi}{4}, \\ \arcsin 2y \cdot \arccos 3x = \frac{5\pi^2}{64}. \end{cases}$$

Для каждого решения (x, y) определите, какое из чисел больше: $2y - 3x$ или $\sqrt[4]{2} - 0,5$.

$$\left(\frac{2\sqrt{2}-1}{2}, \frac{9}{2\sqrt{2}-1} \right)$$

18. (МФТИ, 1991) Решить уравнение

а) $2 \arcsin 2x = \arccos 7x$;

б) $\operatorname{arctg} 3x = \arccos 8x$.

$$\frac{2\sqrt{9}}{1} \left(\frac{8}{1} \right) \left(\frac{8}{1} \right)$$

19. (МФТИ, 2002) Решить уравнение

а) $\operatorname{arctg} \frac{1-x}{3x} + \arcsin 3x = \frac{\pi}{2}$;

б) $\operatorname{arctg} \frac{1-x}{2x} + \arccos 2x = \frac{\pi}{2}$.

$$\frac{5}{2} \left(\frac{5}{1} \right) \left(\frac{5}{2} \right)$$

20. При всех значениях параметра α решите неравенство $\arcsin x \geq \alpha$.

$$\text{Если } \alpha \geq \frac{\pi}{2}, \text{ то } -1 \leq x \leq 1; \text{ если } \alpha \leq -\frac{\pi}{2}, \text{ то } -1 \leq x \leq 1; \text{ если } -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}, \text{ то } \sin \alpha \leq x \leq 1; \text{ если } \alpha < -\frac{\pi}{2}, \text{ то } \sin \alpha < x \leq 1.$$

21. При всех значениях параметра α решите неравенство $\arccos x \leq \alpha$.

$$\text{Если } \alpha > 0, \text{ то } -1 \leq x \leq \cos \alpha; \text{ если } \alpha \leq 0, \text{ то } \cos \alpha \leq x \leq 1; \text{ если } \alpha > \pi, \text{ то } -1 \leq x \leq 1.$$

22. (МГУ, химич. ф-т, 2008) Решите неравенство

$$\arccos 3x \leq \arccos \sqrt{6 - 15x}.$$

$$\frac{8}{1}$$

23. (МГУ, ВМК, 2002) Решите неравенство

$$2 \cos(\arcsin x) - \sin \left(\frac{1}{2} \arccos x \right) \leq 0.$$

$$\{1\} \cap \left[\frac{8}{2} - ; 1 - \right]$$

24. («Покори Воробьёвы горы!», 2012) Решите неравенство

а) $\arcsin(6x^2 - 12x + 6) + 2 \arcsin(x - 1) < 0$;

б) $2 \arcsin(x + 1) + \arccos(3x^2 + 6x + 2) < 0$.

$$\left(\frac{8}{10\sqrt{1+5}} - ; \frac{8}{9\sqrt{1+8}} - \right] \left(\frac{8}{1} ; \left(1 ; \frac{10}{10\sqrt{1-10}} \right) \right) \left(\frac{8}{1} \right)$$

25. (МГУ, ВМК, 1996) Решите неравенство

$$\arccos 3x + \arcsin(x + 1) \leq \frac{7\pi}{6}.$$

$$\left[0; \frac{9\pi}{8\sqrt{2}-8}\right]$$

26. («Ломоносов», 2018, 10–11) Решите неравенство

$$\arcsin\left(\frac{5}{2\pi} \arccos x\right) > \arccos\left(\frac{10}{3\pi} \arcsin x\right).$$

$$\left[\frac{0\pi}{x\pi}; \frac{0\pi}{x6} \pi\right] \cap \left(\frac{0\pi}{x6} \pi; \frac{0\pi}{x}\right]$$

27. («Ломоносов», 2012) Решите неравенство

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{3-x} \geq \arcsin(x^2 - 2x - 4).$$

⊠

28. («Ломоносов», 2012) Найдите все целочисленные решения уравнения

$$\left|\arccos(\sin 6) - \frac{\pi x}{2}\right| = 6.$$

⊠

29. (МГУ, ВКНМ, 2000) Решите уравнение

$$\arccos(\cos x) = x^2 + 10x.$$

$$\frac{\pi}{x^2+10x-6} = 0$$

30. («Ломоносов», 2015, 10–11) Найдите главный (наименьший положительный) период функции

$$y = (\arcsin(\sin(\arccos(\cos 3x))))^{-5}.$$

⊠

31. (ОММО, 2018) Изобразите (с обоснованием) на координатной плоскости Oxy множество решений неравенства

$$(y^2 - \arcsin^2(\sin x)) \left(y^2 - \arcsin^2\left(\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right)\right) \left(y^2 - \arcsin^2\left(\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right)\right) < 0.$$

32. («Покори Воробьёвы горы!», 2013) Найти наибольшее значение выражения

$$2 \arccos(\sin(x - 2y - 1)) + x - y + 2$$

при $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

E + 2Z

33. («Покори Воробьёвы горы!», 2013) Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством

$$\sqrt{\arcsin y} \leq \sqrt{\arccos x}.$$

$\frac{7}{x} + 1$

34. («Ломоносов», 2014) Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством

$$\sqrt{\arcsin \frac{x}{5}} \leq \sqrt{\arccos \frac{y}{5}}.$$

В ответе укажите целое число, ближайшее к найденному значению площади.

45

35. (МГУ, экономич. ф-т, 1993) Найдите периметр фигуры, заданной на координатной плоскости условиями

$$\begin{cases} 2|x - 2| \arcsin((y + 1)^2) \leq \pi(2 - x), \\ 2|y + 1| + x \geq 0. \end{cases}$$

$\frac{10 + 2\sqrt{5}}{5}$

36. (МГУ, географич. ф-т, 2001) Решите уравнение

$$4 \arcsin(2^x - 7) - \arccos(5^x - 124) = \frac{6\pi}{x}.$$

E

37. (МГУ, экономич. ф-т, 1999) Решить уравнение

$$x + \frac{1}{6} \arccos(\cos 15x + 2 \cos 4x \sin 2x) = \frac{\pi}{12}.$$

$\frac{13}{x} : \frac{9x}{x} -$

38. («Покори Воробьёвы горы!», 2014) Укажите целое число, ближайшее к меньшему из корней уравнения

$$\operatorname{arctg} \left(\left(\frac{5x}{26} + \frac{13}{10x} \right)^2 \right) - \operatorname{arctg} \left(\left(\frac{5x}{26} - \frac{13}{10x} \right)^2 \right) = \frac{\pi}{4}.$$

E-

39. («Ломоносов», 2014) Найдите количество корней уравнения

$$\operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \sqrt{35\pi^2 + 4\pi x - 4x^2} \right) = \operatorname{arcsin} \left(\sin \sqrt{\frac{35\pi^2}{4} + \pi x - x^2} \right).$$

11

40. («Покори Воробьёвы горы!», 2013) Выясните, сколько корней имеет уравнение

$$\left(21x - 11 + \frac{\sin x}{100} \right) \cdot \sin(6 \operatorname{arcsin} x) \cdot \sqrt{(\pi - 6x)(\pi + x)} = 0.$$

10

41. («Ломоносов», 2011) Функция $y = f(t)$ такова, что сумма корней уравнения $f(\cos x) = 0$ на отрезке $[\frac{\pi}{2}; \pi]$ равна 17π , а сумма корней уравнения $f(\sin x) = 0$ на отрезке $[\pi; \frac{3\pi}{2}]$ равна 29π . Какова сумма корней второго уравнения на отрезке $[\frac{3\pi}{2}; 2\pi]$?

13

42. («Ломоносов», 2010) Проекция некоторой кривой в координатном пространстве на плоскости Oxz и Oyz удовлетворяют уравнениям $5x + \cos z = 0$ и $z = \operatorname{arctg} \sqrt{y-3}$ соответственно. Найдите функцию $y = f(x)$, график которой состоит из тех и только тех точек, которые могли бы при этих условиях служить проекциями точек той же кривой на плоскость Oxy .

$$\left(0; \frac{9}{1} \right) \ni x \text{ или } z + \frac{x^2 z}{1} = 6$$

43. (МГУ, экономич. ф-т, 2005) Фигура F задаётся на координатной плоскости неравенством

$$\frac{3\pi^2 - 2 \operatorname{arcsin} \left(\frac{y-x+9}{13} \right) \cdot \operatorname{arccos} \left(\frac{10+2x+2y}{18} \right)}{|x-4| \cdot \left(\left| \sqrt{9\sqrt{128}-97} + x \right| + |y+5| \right)} \geq 0.$$

В каких пределах изменяются площади всевозможных кругов, целиком принадлежащих F ?

16