# Углы в тригонометрии

При решении геометрических задач мы обычно имеем дело с углами, находящимися в пределах от 0 до 180°. В тригонометрии ситуация иная: здесь рассматриваются углы произвольной величины (как по модулю, так и по знаку). Данная статья посвящена изучению углов, величина которых может быть любым действительным числом[1].

Угол, как вы знаете, образуется двумя лучами с общим началом. Рассмотрим два луча: *неподвижный луч* $ON$ и *подвижный луч* $OP$ (рис. 1). Неподвижный луч фиксирован; подвижный луч может вращаться вокруг точки $O$.

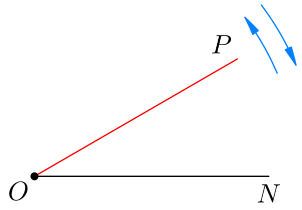


Рис. 1. Неподвижный и подвижный лучи

Повороты подвижного луча могут совершаться в двух направлениях: против часовой стрелки (положительное направление) и по часовой стрелке (отрицательное направление).

Будем говорить, что подвижный луч занимает *начальное положение*, если он совпадает с неподвижным лучом. Начальному положению подвижного луча соответствует *нулевой угол*.

Каждому повороту подвижного луча из начального положения отвечает некоторый угол. Этот угол считается положительным, если поворот совершён против часовой стрелки, и отрицательным в случае поворота по часовой стрелке (рис. 2).

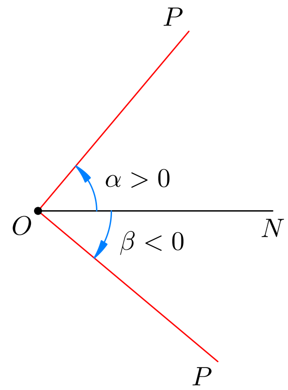


Рис. 2. Положительный и отрицательный углы

Как видите, углы отсчитываются от неподвижного луча в положительном и отрицательном направлениях. Ясно, что по мере движения подвижного луча от начального положения абсолютная величина угла возрастает. Нам нужно обсудить теперь, в каких единицах измеряются углы.

[1] Углы произвольной величины важны не только в математике, но и в физике: фаза колебаний, например, может принимать какое угодно значение от $-\infty$ до $+\infty$.

## Градусная мера угла

Предположим, что подвижный луч совершил из начального положения один полный оборот в положительном направлении и снова совпал с неподвижным лучом. В таком случае мы говорим, что получился *положительный полный угол* (или просто *полный угол*). Величина полного угла по определению считается равной $360^\circ$ (рис. 3, слева).

Точно так же при полном обороте подвижного луча в отрицательном направлении получается *отрицательный полный угол*, равный $-360^\circ$ (рис. 3, справа).


Рис. 3. Полный угол

Таким образом, угол $1^\circ$ — это угол, равный $1/360$ части полного угла[2].

Если подвижный луч совершил половину полного оборота, то получается *развёрнутый угол* (положительный или отрицательный), равный $180^\circ$ или $-180^\circ$ в зависимости от направления поворота (рис. 4).

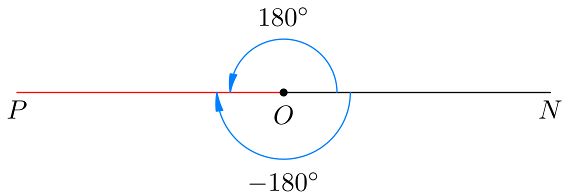


Рис. 4. Развёрнутый угол

Если подвижный луч совершил четверть полного оборота, то получается *прямой угол* (положительный или отрицательный), равный $90^\circ$ или $-90^\circ$ в зависимости от направления поворота (рис. 5, слева). Если подвижный луч совершил три четверти полного оборота, то получается *тройной прямой угол*, равный $270^\circ$ или $-270^\circ$ в зависимости от направления поворота (рис. 5, в центре и справа).

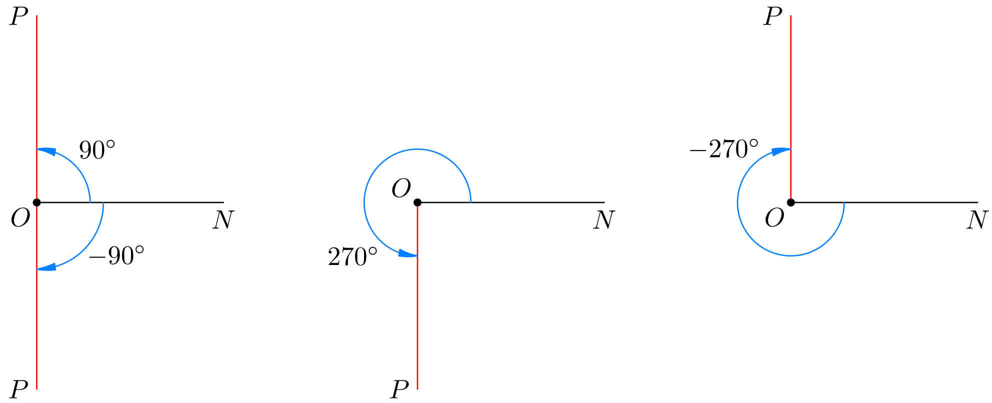


Рис. 5. Прямой угол и тройной прямой угол

Пока мы рассмотрели углы, отвечающие долям полного оборота подвижного луча (а именно, половине, четверти и трём четвертям). Но ясно, что одним-единственным оборотом дело не

[2]В геометрии угол $1^\circ$ определяется как $1/180$ часть развёрнутого угла. Ясно, что это ничем не отличается от нашего «тригонометрического» определения градуса.

ограничивается. Подвижный луч может совершить какое угодно количество оборотов, и это даёт возможность рассматривать углы произвольной величины.

Так, на рис. 6 подвижный луч совершил два полных оборота в положительном направлении. Получился двойной полный угол, равный $360° \cdot 2 = 720°$.

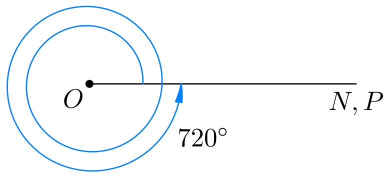


Рис. 6. Угол 720°

На рис. 7 показан угол, равный $-1100°$.

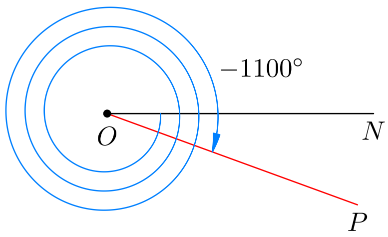


Рис. 7. Угол $-1100°$

Понятно, как этот угол получился? Совершились три полных оборота в отрицательном направлении ($-360° \cdot 3 = -1080°$) и, сверх того, дополнительный поворот на $-20°$.

## Радианная мера угла

Для измерения угловой величины используются не только градусы, но и радианы. Во многих ситуациях радианная мера угла естественнее и удобнее, чем градусная.

Давайте посмотрим на рис. 8.

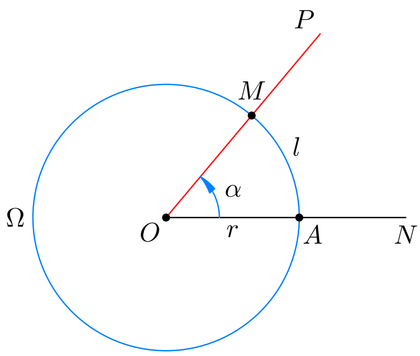


Рис. 8. К определению радианной меры угла

Изображена окружность $\Omega$ радиуса $r$ с центром в точке $O$. Эта окружность пересекает неподвижный луч в точке $A$, а подвижный луч — в точке $M$. Таким образом, при вращении подвижного луча точка $M$ перемещается по окружности $\Omega$; начальным положением точки $M$ служит точка $A$.

При повороте подвижного луча на угол $\alpha$ точка $M$ описывает дугу $AM$. Пусть $l$ — длина этой дуги. Тогда радианная мера угла $\alpha$ определяется следующим образом:

$$\alpha = \begin{cases} \dfrac{l}{r} & \text{при повороте в положительном направлении,} \\[2ex] -\dfrac{l}{r} & \text{при повороте в отрицательном направлении.} \end{cases} \tag{1}$$

Нетрудно понять, что величина $\alpha$ определена корректно, то есть не зависит от выбора окружности $\Omega$. В самом деле, если радиус $r$ изменится в некоторое количество раз, то длина $l$ дуги $AM$ изменится в такое же количество раз, и потому отношение $l/r$ останется неизменным.

Сейчас мы на конкретных примерах убедимся, что радианная мера угла не зависит от выбранного радиуса $r$.

Давайте выясним, чему равен полный угол в радианах. Если подвижный луч совершает один полный оборот, то точка $M$ пробегает всю окружность $\Omega$. Длина окружности:

$$l = 2\pi r,$$

поэтому согласно определению (1) получаем:

$$\text{полный угол} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi. \tag{2}$$

(Именно так — без указания на единицу измерения — записывается значение угловой величины в радианах. Например, запись $\alpha = 30$ будет означать угол в 30 радиан. Поэтому будьте внимательны: записывая угол в градусах, не забывайте ставить значок градуса!)

Как видите, радиус $r$ сократился в ходе вычислений — величина полного угла от выбора $r$ действительно не зависит и оказывается равной $2\pi$.

Положительный полный угол и отрицательный полный угол, выраженные в радианах, показаны на рис. 9.


Рис. 9. Полный угол в радианах

Развёрнутый угол равен половине полного угла, поэтому радианная мера положительного развёрнутого угла равна $\pi$. Положительный и отрицательный развёрнутые углы, выраженные в радианах, показаны на рис. 10.

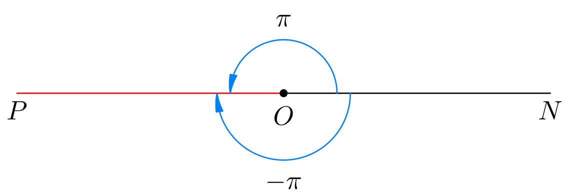


Рис. 10. Развёрнутый угол в радианах

Прямой угол равен половине развёрнутого угла, поэтому радианная мера положительного прямого угла равна $\pi/2$.

Умножив $\pi/2$ на три, получим радианную меру положительного тройного прямого угла: она равна $3\pi/2$.

Прямой угол и тройной прямой угол (положительные и отрицательные), выраженные в радианах, показаны на рис. 11.

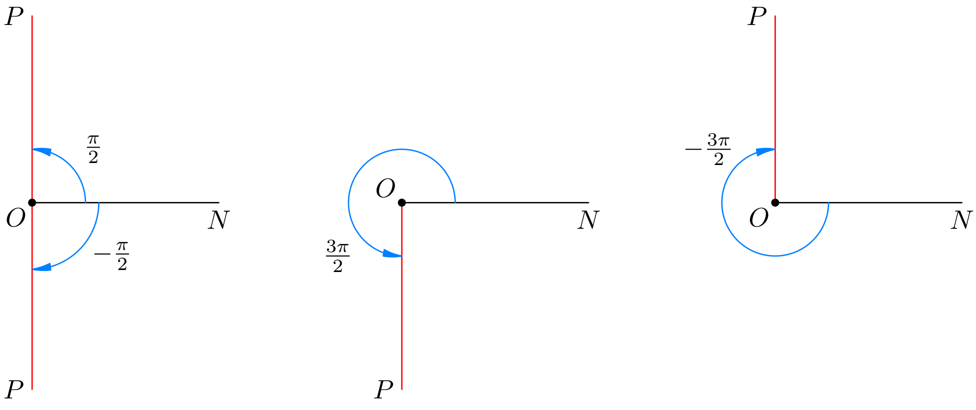


Рис. 11. Прямой угол и тройной прямой угол в радианах

Что же такое угол 1 радиан? Согласно определению (1) угол, равный 1, получается при $l = r$. Стало быть, при повороте подвижного луча на 1 радиан точка $M$ проходит дугу, равную радиусу окружности $\Omega$ (рис. 12).

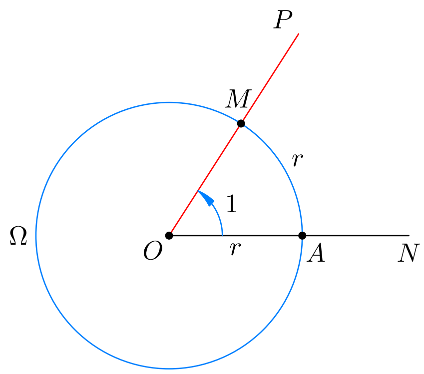


Рис. 12. Угол 1 радиан

Иными словами, в случае угла 1 радиан сектор $AOM$ оказывается «равносторонним».

## Связь градусной и радианной мер

Как мы уже выяснили, полный угол равен 360° или $2\pi$ радиан. Отсюда получаем первую формулу, связывающую градусную и радианную меры:

$$360^\circ = 2\pi. \tag{3}$$

Иллюстрацией полученного равенства являются рисунки 3 и 9.

Разделив обе части формулы (3) на 2, получим угловую величину развёрнутого угла в градусах и радианах:

$$180^\circ = \pi. \tag{4}$$

Иллюстрацией данного равенства служат рисунки 4 и 10.

Далее, разделив обе части формулы (4) на 2, получим угловую величину прямого угла в градусах и радианах:

$$90^\circ = \frac{\pi}{2}\,. \tag{5}$$

Умножив обе части формулы (5) на 3, получим угловую величину тройного прямого угла в градусах и радианах:

$$270^\circ = \frac{3\pi}{2}\,. \tag{6}$$

Иллюстрацией равенств (5) и (6) служат рисунки 5 и 11.

Выведем ещё ряд формул, связывающих градусные и радианные меры некоторых часто встречающихся углов.

Разделим на 3 обе части формулы (4):

$$60^\circ = \frac{\pi}{3}\,. \tag{7}$$

Разделим обе части полученной формулы на 2:

$$30^\circ = \frac{\pi}{6}\,. \tag{8}$$

Разделим на 2 обе части формулы (5):

$$45^\circ = \frac{\pi}{4}\,. \tag{9}$$

Умножим на 2 обе части формулы (7):

$$120^\circ = \frac{2\pi}{3}\,. \tag{10}$$

Умножим на 3 обе части формулы (9):

$$135^\circ = \frac{3\pi}{4}\,. \tag{11}$$

Умножим на 5 обе части формулы (8):

$$150^\circ = \frac{5\pi}{6}\,. \tag{12}$$

Формулы (3)–(12) исключительно важны и неоднократно встретятся нам в дальнейшем.

Сколько градусов составляет один радиан? Как мы знаем из формулы (4), угол $\pi$ радиан равен $180^\circ$. Следовательно,

$$1 = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57{,}3^\circ. \tag{13}$$

(Напомним ещё раз, что при указании угла в радианах ставится одно только число, без дальнейшего дописывания «радиан» или «рад». Поэтому число 1 в левой части последней формулы как раз и означает один радиан.)

Из формулы (4) также следует, что угол $1^\circ$ составляет $1/180$ часть от $\pi$ (радиан):

$$1^\circ = \frac{\pi}{180}\,. \tag{14}$$

Формулы (13) и (14) позволяют легко переходить от градусов к радианам и обратно.

**Пример.** Выразить в радианах угол $80^\circ$.

*Решение.* С помощью формулы (14) имеем:

$$80^\circ = 80 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{4\pi}{9}\,.$$

**Пример.** Выразить в градусах угол $2\pi/5$.

*Решение.* Здесь проще всего воспользоваться тем, что $\pi = 180^\circ$:

$$\frac{2\pi}{5} = \frac{2 \cdot 180^\circ}{5} = 72^\circ.$$

**Пример.** Выразить в градусах угол $5/9$.

*Решение.* С помощью формулы (13) получаем:

$$\frac{5}{9} = \frac{5}{9} \cdot 1 = \frac{5}{9} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = \left(\frac{100}{\pi}\right)^\circ.$$