

Трапеция

Трапеция — это четырёхугольник, две стороны которого параллельны, а две другие — не параллельны. Параллельные стороны называются *основаниями* трапеции, а непараллельные — *боковыми сторонами*.

Так, на рис. 1 изображена трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC и боковыми сторонами AB и CD .

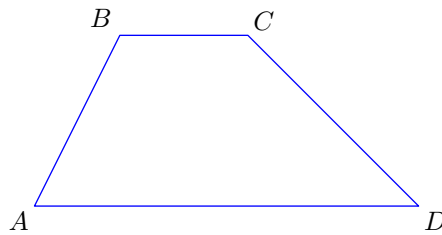


Рис. 1. Трапеция

Средняя линия трапеции — это отрезок, соединяющий середины боковых сторон.

ТЕОРЕМА О СРЕДНЕЙ ЛИНИИ ТРАПЕЦИИ. Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть KL — средняя линия трапеции $ABCD$ (рис. 2). Пусть прямые BL и AD пересекаются в точке M .

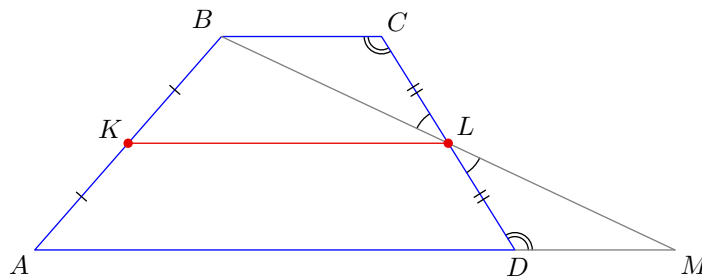


Рис. 2. К доказательству теоремы

В треугольниках BCL и LDM имеем: 1) $CL = LD$; 2) $\angle BLC = \angle DLM$ как вертикальные; 3) $\angle BCL = \angle LDM$ как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD . Следовательно, треугольники BCL и LDM равны по стороне и двум прилежащим к ней углам, так что $DM = BC$ и $BL = LM$.

Таким образом, KL оказывается средней линией треугольника ABM . Из теоремы о средней линии треугольника немедленно следует, что $KL \parallel AD \parallel BC$. Кроме того, имеем:

$$KL = \frac{AM}{2} = \frac{AD + DM}{2} = \frac{AD + BC}{2}.$$

Теорема доказана.

Трапеция называется *равнобедренной*, если её боковые стороны равны. Применяются также термины *равнобокая* и *равнобочная*.

Трапеция называется *прямоугольной*, если один из её углов — прямой.

Высота трапеции — это перпендикуляр, опущенный из точки основания на прямую, содержащую другое основание.

Задачи

1. (*Свойства равнобедренной трапеции*) Докажите, что:
- углы при основании равнобедренной трапеции равны;
 - сумма противоположных углов равнобедренной трапеции равна 180° ;
 - диагонали равнобедренной трапеции равны.
2. (*Признаки равнобедренной трапеции*) Докажите, что:
- если углы при основании трапеции равны, то она равнобедренная;
 - если сумма противоположных углов трапеции равна 180° , то она равнобедренная;
 - если диагонали трапеции равны, то она равнобедренная.
3. Наибольший угол прямоугольной трапеции равен 120° , а бо́льшая боковая сторона равна 2. Найдите разность оснований.

1

4. В равнобедренной трапеции $ABCD$ известны основания: $AD = a$, $BC = b$ ($a > b$). Из вершины C проведена высота CH . Найдите AH и DH .

$$\frac{a}{b-a}, \frac{a}{b+a}$$

5. Диагонали равнобедренной трапеции равны 6 и пересекаются под углом 40° . Найдите углы и стороны четырёхугольника с вершинами в серединах сторон данной трапеции.

$$40^\circ, 140^\circ, 40^\circ, 140^\circ; 5, 5, 5, 5$$

6. Диагонали трапеции перпендикулярны, а средняя линия равна 5. Найдите отрезок, соединяющий середины оснований.

7

7. Высота равнобедренной трапеции, проведённая из конца меньшего основания, делит большее основание на отрезки, равные 4 и 8. Найдите основания трапеции.

$$4 \text{ и } 12$$

8. Найдите меньшее основание равнобедренной трапеции, если высота, проведённая из конца меньшего основания, делит большее основание на отрезки, разность которых равна 3.

3

9. Боковая сторона равнобедренной трапеции видна из точки пересечения диагоналей под углом 60° . Высота трапеции равна h . Найдите диагонали.

$$2h$$

10. Острый угол равнобедренной трапеции равен 60° . Докажите, что меньшее основание равно разности большего основания и боковой стороны.

11. Диагональ равнобедренной трапеции равна 10 и образует угол 60° с основанием. Найдите среднюю линию трапеции.

5

12. В трапеции $ABCD$ боковая сторона $AB = 2,6$ и меньшее основание $BC = 2,5$. Какой из отрезков пересекает биссектриса угла A : основание BC или боковую сторону CD ?

CD

13. Расстояния от концов диаметра окружности до касательной равны a и b . Найдите радиус окружности.

$\frac{c}{q+p}$

14. Окружность касается всех сторон равнобедренной трапеции. Докажите, что боковая сторона трапеции равна средней линии.

15. Окружность касается всех сторон трапеции. Докажите, что боковая сторона трапеции видна из центра окружности под прямым углом.

16. Боковые стороны трапеции равны 7 и 11, а основания — 5 и 15. Прямая, проведённая через вершину меньшего основания параллельно большей боковой стороне, отсекает от трапеции треугольник. Найдите его стороны.

$11 \text{ и } 12$

17. Меньшая боковая сторона прямоугольной трапеции равна 3, а большая образует угол 30° с одним из оснований. Найдите это основание, если на нём лежит точка пересечения биссектрис углов при другом основании.

6

18. Докажите, что биссектрисы углов при боковой стороне трапеции пересекаются на её средней линии.

19. Дана трапеция $ABCD$ с основанием AD . Биссектрисы внешних углов при вершинах A и B пересекаются в точке P , а при вершинах C и D — в точке Q . Докажите, что отрезок PQ равен полупериметру трапеции.

20. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) биссектрисы углов при вершинах A и B пересекаются в точке M , а биссектрисы углов при вершинах C и D — в точке N . Найдите MN , если $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = d$.

$(c - b - p + q) \frac{c}{4}$

21. Основания трапеции равны a и b ($a > b$). Найдите длину отрезка, соединяющего середины диагоналей трапеции.

$\frac{c}{q-b}$

22. Один из углов прямоугольной трапеции равен 120° , большее основание и меньшая диагональ равны 12. Найдите отрезок, соединяющий середины диагоналей.

8

23. Найдите отношение оснований трапеции, если её средняя линия делится диагоналями на три равные части.

$7 : 1$

24. Боковая сторона трапеции равна одному основанию и вдвое меньше другого. Докажите, что вторая боковая сторона перпендикулярна одной из диагоналей.

25. Диагонали трапеции перпендикулярны. Одна из них равна 6, а другая образует угол 30° с основанием. Найдите среднюю линию трапеции.

9

26. Диагонали равнобедренной трапеции перпендикулярны. Докажите, что средняя линия трапеции равна её высоте.

27. Средняя линия трапеции равна 5, а отрезок, соединяющий середины оснований, равен 3. Углы при большем основании трапеции равны 30° и 60° . Найдите основания и меньшую боковую сторону трапеции.

8, 7, 8

28. Точка M — середина отрезка AB . Точки A_1 , M_1 и B_1 — проекции точек A , M и B на некоторую прямую. Докажите, что M_1 — середина отрезка A_1B_1 .

29. На прямую, проходящую через вершину A треугольника ABC , опущены перпендикуляры BD и CE . Докажите, что середина стороны BC равноудалена от точек D и E .

30. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке K . Одна прямая касается этих окружностей в различных точках A и B , а вторая прямая — соответственно в точках C и D . Общая касательная к окружностям, проходящая через точку C , пересекается с этими прямыми в точках M и N . Найдите MN , если $AC = a$, $BC = b$.

$\frac{c}{q+p}$

31. Биссектрисы углов при одном основании трапеции пересекаются на втором её основании. Докажите, что второе основание равно сумме боковых сторон.

32. Одна из боковых сторон трапеции равна сумме оснований. Докажите, что биссектрисы углов при этой стороне пересекаются на другой боковой стороне.

33. Известно, что в трапецию можно вписать окружность. Докажите, что окружности, построенные на боковых сторонах трапеции как на диаметрах, касаются друг друга.

34. Сумма углов при одном основании трапеции равна 90° . Докажите, что отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, равен их полуразности.

35. Отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон четырёхугольника, равен полусумме двух других сторон. Докажите, что этот четырёхугольник — трапеция или параллелограмм.

36. Окружность, построенная на большем основании трапеции как на диаметре, проходит через середины боковых сторон и касается меньшего основания. Найдите углы трапеции.

75°, 75°, 105°, 105°

37. Окружность, построенная на меньшем основании трапеции как на диаметре, проходит через середины диагоналей и касается большего основания. Найдите углы трапеции.

0091 ' 0091 ' 009 ' 009

38. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы A и C прямые. На диагональ AC опущены перпендикуляры BE и DF . Докажите, что $CE = AF$.

39. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BD и CE . Из вершин B и C на прямую ED опущены перпендикуляры BM и CN . Докажите, что $EM = DN$.

40. На отрезке AB взята точка C . Прямая, проходящая через точку C , пересекает окружности с диаметрами AC и BC в точках K и L , а окружность с диаметром AB — в точках M и N . Докажите, что $KM = LN$.