Теорема Пифагора

Мы готовы вывести важнейшую теорему геометрии — теорему Пифагора. С помощью теоремы Пифагора выполняются многие геометрические вычисления.

Косинус угла

Прежде всего нам понадобится понятие косинуса острого угла. Пусть α — острый угол прямоугольного треугольника (рис. 1).

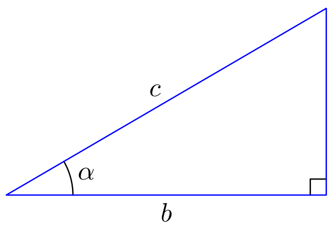

Рис. 1. $\cos\alpha = b/c$

Косинус угла α — это отношение прилежащего катета к гипотенузе:

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}.$$

Замечательно то, что косинус угла α не зависит от конкретного прямоугольного треугольника (с острым углом α) и определяется лишь самой величиной α. В таких случаях говорят, что определение *корректно*. Докажем корректность определения косинуса.

Доказательство корректности. Рассмотрим два прямоугольных треугольника, каждый с острым углом α. Совместим их так, как показано на рис. 2.

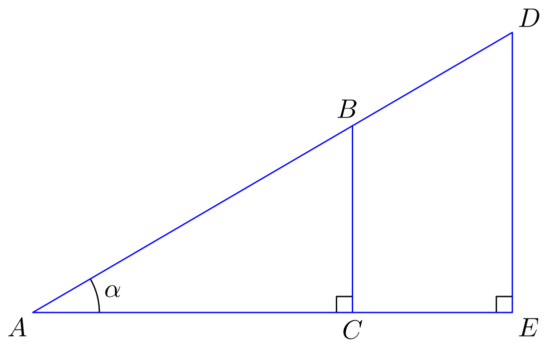

Рис. 2. К доказательству корректности

По теореме о пропорциональных отрезках имеем:

$$\frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD},$$

откуда

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD}.$$

Как видим, в треугольниках ABC и ADE отношение прилежащего катета к гипотенузе одно и тоже. Следовательно, величина $\cos\alpha$ не зависит от выбранного треугольника, так что косинус угла определено корректно.

Теорема Пифагора

Введённое понятие косинуса угла позоляет доказать теорему Пифагора.

Теорема Пифагора. В прямоугольном треугольнике сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы.

Доказательство. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с катетами $BC = a$, $AC = b$ и гипотенузой $AB = c$. Проведём высоту CH (рис. 3).

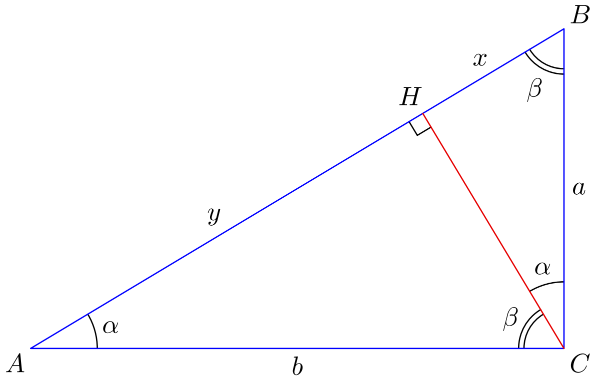

Рис. 3.

Отрезок $BH = x$ есть проекция катета a на гипотенузу. Отрезок $AH = y$ есть проекция катета b на гипотенузу. Очевидно, что $x + y = c$.

Пусть $\angle A = \alpha$ и $\angle B = \beta$ — острые углы треугольника ABC. Угол β является также острым углом треугольника BCH; ясно поэтому, что $\angle BCH = \alpha$. Точно так же $\angle ACH = \beta$.

Из треугольников BCH и ABC имеем соответственно:

$$\cos\beta = \frac{x}{a}\,, \quad \cos\beta = \frac{a}{c}\,,$$

откуда

$$\frac{x}{a} = \frac{a}{c}\,,$$

или

$$a^2 = cx. \tag{1}$$

Записав это в виде $a = \sqrt{cx}$, мы видим, что *катет есть среднее геометрическое гипотенузы и своей проекции на гипотенузу*.

Точно такой же результат имеем и для другого катета:

$$b^2 = cy. \tag{2}$$

Складывая (1) и (2), получим:

$$a^2 + b^2 = cx + cy = c(x + y) = c \cdot c = c^2.$$

Теорема Пифагора доказана.

Обратная теорема Пифагора. Если сумма квадратов двух сторон треугольника равна квадрату третьей стороны, то такой треугольник является прямоугольным (третья сторона — гипотенуза).

Доказательство. Пусть для сторон a, b, c некоторого треугольника Δ выполнено равенство $a^2 + b^2 = c^2$. Рассмотрим прямоугольный треугольник Δ_1 с катетами a и b. По теореме Пифагора его гипотенуза равна $\sqrt{a^2+b^2} = c$. Значит, треугольники Δ и Δ_1 равны по трём сторонам, и поэтому Δ — прямоугольный треугольник с катетами a, b и гипотенузой c. Теорема доказана.

Числа a, b, c, связанные соотношением $a^2 + b^2 = c^2$, называются *пифагоровой тройкой*. Пифагоровых троек бесконечно много. Несколько пифагоровых троек встречаются в задачах весьма часто и их обязательно нужно знать.

1) Тройка 3, 4, 5 ($3^2+4^2=5^2$). Прямоугольный треугольник с катетами 3, 4 и гипотенузой 5 называется *египетским*.

2) Тройки, кратные тройке 3, 4, 5:
— 6, 8, 10;
— 9, 12, 15;
— 12, 16, 20;
— 15, 20, 25 и так далее.

3) Другие важные тройки:
— 5, 12, 13 ($5^2+12^2=13^2$);
— 7, 24, 25;
— 8, 15, 17;
— 9, 40, 41.

Синус, тангенс, котангенс

Снова рассмотрим прямоугольный треугольник с катетами a, b и гипотенузой c (рис. 4).

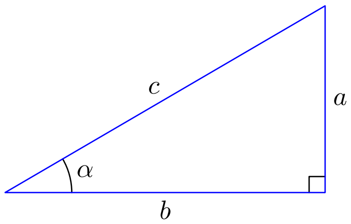

Рис. 4.

Синус угла α — это отношение противолежащего катета к гипотенузе:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}\,.$$

Косинус угла α — это, как мы уже знаем, отношение прилежащего катета к гипотенузе:

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}\,.$$

Тангенс угла α — это отношение противолежащего катета к прилежащему:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}\,.$$

Котангенс угла α — это отношение прилежащего катета к противолежащему:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}\,.$$

Основное тригонометрическое тождество:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Основное тригонометрическое тождество доказывается очень просто с помощью теоремы Пифагора. Вы это сделаете самостоятельно в соответствующей задаче к данному листку.

Из основного тригонометрического тождества мы видим, что синус острого угла однозначно вычисляется через его косинус:

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}\,.$$

Следовательно, синус угла также определён корректно — значение синуса определяется только величиной угла и не зависит от выбранного прямоугольного треугольника.

Далее, для тангенса имеем:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{a/c}{b/c} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\,.$$

Аналогично,

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,.$$

Эти равенства показывают, что тангенс и котангенс также зависят лишь от величины угла, но не от конкретного прямоугольного треугольника.