Теорема Пифагора

Мы готовы вывести важнейшую теорему геометрии — теорему Пифагора. С помощью теоремы Пифагора выполняются многие геометрические вычисления.

Косинус угла

Прежде всего нам понадобится понятие косинуса острого угла. Пусть α — острый угол прямоугольного треугольника (рис. 1).

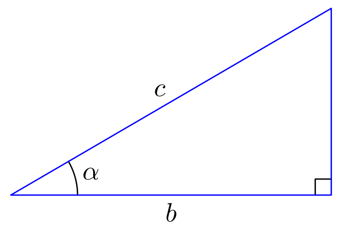

Рис. 1. $\cos\alpha = b/c$

Косинус угла α — это отношение прилежащего катета к гипотенузе:

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}\,.$$

Замечательно то, что косинус угла α не зависит от конкретного прямоугольного треугольника (с острым углом α) и определяется лишь самой величиной α. В таких случаях говорят, что определение *корректно*. Докажем корректность определения косинуса.

Доказательство корректности. Рассмотрим два прямоугольных треугольника, каждый с острым углом α. Совместим их так, как показано на рис. 2.

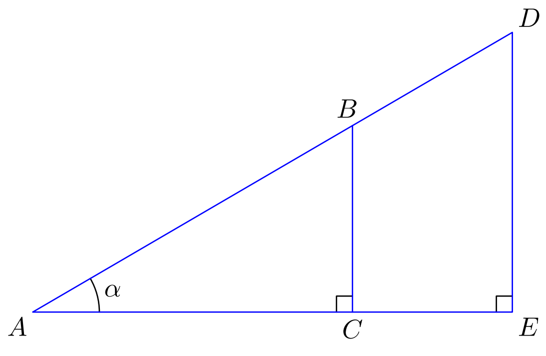

Рис. 2. К доказательству корректности

По теореме о пропорциональных отрезках имеем:

$$\frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD}\,,$$

откуда

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD}\,.$$

Как видим, в треугольниках ABC и ADE отношение прилежащего катета к гипотенузе одно и тоже. Следовательно, величина $\cos\alpha$ не зависит от выбранного треугольника, так что косинус угла определено корректно.

Теорема Пифагора

Введённое понятие косинуса угла позоляет доказать теорему Пифагора.

Теорема Пифагора. В прямоугольном треугольнике сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы.

Доказательство. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с катетами $BC = a$, $AC = b$ и гипотенузой $AB = c$. Проведём высоту CH (рис. 3).

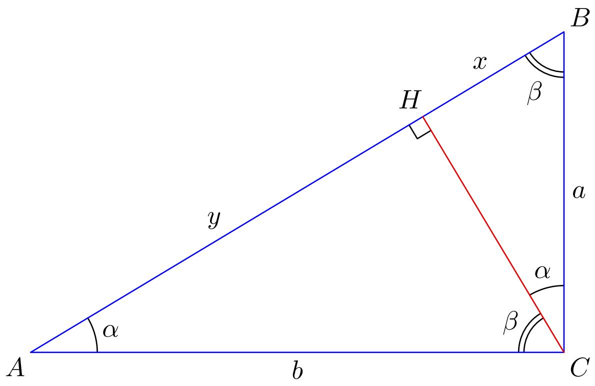

Рис. 3.

Отрезок $BH = x$ есть проекция катета a на гипотенузу. Отрезок $AH = y$ есть проекция катета b на гипотенузу. Очевидно, что $x + y = c$.

Пусть $\angle A = \alpha$ и $\angle B = \beta$ — острые углы треугольника ABC. Угол β является также острым углом треугольника BCH; ясно поэтому, что $\angle BCH = \alpha$. Точно так же $\angle ACH = \beta$.

Из треугольников BCH и ABC имеем соответственно:

$$\cos\beta = \frac{x}{a}\,, \quad \cos\beta = \frac{a}{c}\,,$$

откуда

$$\frac{x}{a} = \frac{a}{c}\,,$$

или

$$a^2 = cx. \tag{1}$$

Записав это в виде $a = \sqrt{cx}$, мы видим, что *катет есть среднее геометрическое гипотенузы и своей проекции на гипотенузу.*

Точно такой же результат имеем и для другого катета:

$$b^2 = cy. \tag{2}$$

Складывая (1) и (2), получим:

$$a^2 + b^2 = cx + cy = c(x + y) = c \cdot c = c^2.$$

Теорема Пифагора доказана.

Обратная теорема Пифагора. Если сумма квадратов двух сторон треугольника равна квадрату третьей стороны, то такой треугольник является прямоугольным (третья сторона — гипотенуза).

Доказательство. Пусть для сторон a, b, c некоторого треугольника Δ выполнено равенство $a^2+b^2 = c^2$. Рассмотрим прямоугольный треугольник Δ_1 с катетами a и b. По теореме Пифагора его гипотенуза равна $\sqrt{a^2+b^2} = c$. Значит, треугольники Δ и Δ_1 равны по трём сторонам, и поэтому Δ — прямоугольный треугольник с катетами a, b и гипотенузой c. Теорема доказана.

Числа a, b, c, связанные соотношением $a^2 + b^2 = c^2$, называются *пифагоровой тройкой*. Пифагоровых троек бесконечно много. Несколько пифагоровых троек встречаются в задачах весьма часто и их обязательно нужно знать.

1) Тройка 3, 4, 5 ($3^2+4^2=5^2$). Прямоугольный треугольник с катетами 3, 4 и гипотенузой 5 называется *египетским*.

2) Тройки, кратные тройке 3, 4, 5:
— 6, 8, 10;
— 9, 12, 15;
— 12, 16, 20;
— 15, 20, 25 и так далее.

3) Другие важные тройки:
— 5, 12, 13 ($5^2+12^2=13^2$);
— 7, 24, 25;
— 8, 15, 17;
— 9, 40, 41.

Синус, тангенс, котангенс

Снова рассмотрим прямоугольный треугольник с катетами a, b и гипотенузой c (рис. 4).

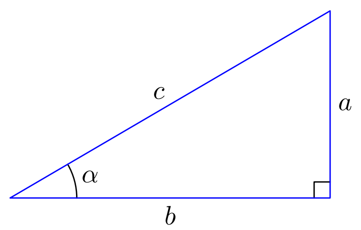

Рис. 4.

Синус угла α — это отношение противолежащего катета к гипотенузе:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}\,.$$

Косинус угла α — это, как мы уже знаем, отношение прилежащего катета к гипотенузе:

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}\,.$$

Тангенс угла α — это отношение противолежащего катета к прилежащему:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}\,.$$

Котангенс угла α — это отношение прилежащего катета к противолежащему:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}\,.$$

Основное тригонометрическое тождество:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Основное тригонометрическое тождество доказывается очень просто с помощью теоремы Пифагора. Вы это сделаете самостоятельно в соответствующей задаче к данному листку.

Из основного тригонометрического тождества мы видим, что синус острого угла однозначно вычисляется через его косинус:

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}\,.$$

Следовательно, синус угла также определён корректно — значение синуса определяется только величиной угла и не зависит от выбранного прямоугольного треугольника.

Далее, для тангенса имеем:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{a/c}{b/c} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\,.$$

Аналогично,

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,.$$

Эти равенства показывают, что тангенс и котангенс также зависят лишь от величины угла, но не от конкретного прямоугольного треугольника.

Задачи

1. Найдите диагональ квадрата со стороной a.

$\boxed{a\sqrt{2}}$

2. В прямоугольном треугольнике с углом 60° гипотенуза равна 2. Найдите катеты.

$\boxed{1 \text{ и } \sqrt{3}}$

3. Вычислите синус, косинус, тангенс и котангенс углов 45°, 30° и 60°.

4. С помощью теоремы Пифагора докажите основное тригонометрическое тождество.

5. В прямоугольном треугольнике с острым углом α гипотенуза равна c. Найдите катеты.

$\boxed{c\cos\alpha \text{ и } c\sin\alpha}$

6. Найдите высоту прямоугольного треугольника, проведённую из вершины прямого угла, если гипотенуза равна 8, а один из острых углов равен 60°.

$\boxed{2\sqrt{3}}$

7. В равнобедренном треугольнике ABC угол при вершине B равен 120°, а основание равно 6. Найдите боковую сторону.

$\boxed{3\sqrt{3}}$

8. Найдите диагональ прямоугольника со сторонами 5 и 12.

$\boxed{13}$

9. Основания прямоугольной трапеции равны 6 и 8. Один из углов при меньшем основании равен 120°. Найдите диагонали трапеции.

$\boxed{4\sqrt{3} \text{ и } 2\sqrt{19}}$

10. Найдите высоту прямоугольного треугольника, проведённую из вершины прямого угла, если проекции катетов на гипотенузу равны x и y.

$\boxed{\sqrt{xy}}$

11. Найдите катеты, если их проекции на гипотенузу равны x и y.

$\boxed{\sqrt{x(x+y)},\ \sqrt{y(x+y)}}$

12. Высота параллелограмма, проведённая из вершины тупого угла, равна h и делит сторону пополам. Острый угол параллелограмма равен 30°. Найдите диагонали параллелограмма.

$\boxed{2h \text{ и } 2h\sqrt{7}}$

13. Диагональ BD параллелограмма $ABCD$ перпендикулярна стороне AB. Высота BM параллелограмма делит сторону AD на отрезки $DM = 9$ и $AM = 4$. найдите стороны и диагонали параллелограмма.

$\boxed{13,\ 2\sqrt{13},\ 3\sqrt{13},\ 5\sqrt{13}}$

14. Найдите расстояние от центра окружности радиуса 10 до хорды длиной 12.

$\boxed{8}$

15. Точка M находится на расстоянии 26 от центра окружности радиуса 10. Прямая MA касается окружности в точке A. Найдите длину отрезка MA.

$\boxed{24}$

16. Прямые, касающиеся в точках A и B окружности с центром O, пересекаются в точке M. Найдите хорду AB, если отрезок MO делится ею на отрезки 2 и 18.

$\boxed{12}$

17. Найдите сторону квадрата, вписанного в окружность диаметра 14.

$\boxed{7\sqrt{2}}$

18. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 15, а проекция второго катета на гипотенузу равна 16. Найдите гипотенузу и второй катет.

$\boxed{25 \text{ и } 20}$

19. Медиана прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, равна 5 и делит прямой угол в отношении 1 : 2. Найдите стороны треугольника.

$\boxed{5,\ 5\sqrt{3},\ 10}$

20. Катеты прямоугольного треугольника равны 12 и 16. Найдите медиану, проведённую к гипотенузе.

$\boxed{10}$

21. Найдите высоту трапеции со сторонами 5, 5, 5, 13.

$\boxed{3}$

22. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 13, основание равно 10. Найдите высоту треугольника, проведённую к основанию.

$\boxed{12}$

23. Дан равносторонний треугольник со стороной a. Найдите его высоту, а также радиусы вписанной и описанной окружностей.

$\boxed{\frac{a\sqrt{3}}{2},\ \frac{a}{2\sqrt{3}},\ \frac{a}{\sqrt{3}}}$

24. Вершина M правильного треугольника ABM со стороной a расположена на стороне CD прямоугольника $ABCD$. Найдите диагональ этого прямоугольника.

$\boxed{\frac{a\sqrt{7}}{2}}$

25. Стороны треугольника равны a и b. К этим сторонам проведены высоты h_a и h_b соответственно. Докажите, что $ah_a = bh_b$.

26. Катеты прямоугольного треугольника равны 3 и 4. Найдите высоту, проведённую к гипотенузе.

$\boxed{\frac{12}{5}}$

27. Основание равнобедренного треугольника равно a, боковая сторона равна b. Найдите высоту, проведённую к боковой стороне.

$\boxed{\frac{\sqrt{4b^2-a^2}}{2b}}$

28. Сторона квадрата $ABCD$ с центром O равна 6. Точка M расположена на стороне CD, причём $CM : MD = 1 : 2$. Найдите стороны треугольника AOM.

$\boxed{2\sqrt{2},\ 2\sqrt{13},\ \sqrt{10}}$

29. В треугольнике со сторонами 13, 14, 15 найдите высоту, проведённую к большей стороне.

$\boxed{\frac{56}{5}}$

30. Найдите высоту трапеции с основаниями 4, 14 и боковыми сторонами 6, 8.

$\boxed{\frac{24}{5}}$

31. Одно основание прямоугольной трапеции вдвое больше другого, а боковые стороны равны 4 и 5. Найдите диагонали трапеции.

$\boxed{5 \text{ и } 2\sqrt{13}}$

32. В прямоугольный треугольник вписан квадрат так, что одна из его сторон находится на гипотенузе. Боковые отрезки гипотенузы равны p и q. Найдите сторону квадрата.

$\boxed{\sqrt{pq}}$

33. В прямоугольный треугольник с углом в 60° вписан ромб со стороной 6 так, что угол 60° у них общий, а остальные вершины ромба лежат на сторонах треугольника. Найдите стороны треугольника.

$\boxed{9,\ 9\sqrt{3},\ 18}$

34. Две вержины квадрата лежат на основании равнобедренного треугольника, а две другие — на его боковых сторонах. Найдите сторону квадрата, если основание треугольника равно a, а угол при основании равен 30°.

$\boxed{\frac{a(2\sqrt{3}-1)}{11}}$

35. Найдите диагональ и боковую сторону равнобедренной трапеции с основаниями 20 и 12, если центр описанной вокруг неё окружности лежит на большем основании.

$\boxed{4\sqrt{5} \text{ и } 8\sqrt{5}}$

36. Хорда AC окружности радиуса R образует с диаметром AB угол α. Найдите расстояние от точки C до диаметра AB.

$\boxed{2R\sin\alpha\cos\alpha}$

37. Диагональ равнобедренной трапеции равна d, средняя линия равна m. Найдите высоту трапеции.

$\boxed{\sqrt{d^2-m^2}}$

38. Продолжения боковых сторон трапеции пересекаются под прямым углом. Бóльшая боковая сторона равна 8, а разность оснований равна 10. Найдите меньшую боковую сторону.

$\boxed{6}$

39. Радиус окружности, вписанной в ромб, равен r, а острый угол ромба равен α. Найдите сторону ромба.

$\boxed{\frac{2r}{\sin\alpha}}$

40. Отрезок, соединяющий центры двух пересекающихся окружностей, делится их общей хордой на отрезки 5 и 2. Найдите общую хорду, если известно, что радиус одной окружности вдвое больше радиуса другой.

$\boxed{2\sqrt{3}}$

41. Из точки M проведены касательные MA и MB к окружности с центром O (A и B — точки касания). Найдите радиус окружности, если $\angle AMB = \alpha$ и $AB = a$.

$\boxed{\frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}}$

42. Найдите основание равнобедренного треугольника, если его боковая сторона равна a, а высота, проведённая к основанию, равна отрезку, соединяющему середину основания с серединой боковой стороны.

$\boxed{a\sqrt{3}}$

43. Сторона треугольника равна 2, а прилежащие к ней углы равны 30° и 45°. Найдите остальные стороны треугольника.

$2\left(\sqrt{3}-1\right)$ и $\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)$

44. Косинус угла при основании равнобедренного треугольника равен $3/5$, а высота, опущенная на основание, равна h. Найдите высоту, опущенную на боковую сторону.

$\frac{6h}{5}$

45. Вершины M и N равностороннего треугольника BMN лежат соответственно на сторонах AD и CD квадрата $ABCD$ со стороной a. Найдите MN.

$a\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$

46. Радиус окружности, описанной вокруг равнобедренного треугольника, равен R. Угол при основании равен α. Найдите стороны треугольника.

$2R\sin\alpha$, $4R\sin\alpha\cos\alpha$

47. Вычислите $\sin 15°$.

$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

48. Медианы, проведённые к катетам прямоугольного треугольника, равны a и b. Найдите гипотенузу.

$2\sqrt{\frac{a^2+b^2}{5}}$

49. Две стороны треугольника равны a и b. Медианы, проведённые к этим сторонам, перпендикулярны. Найдите третью сторону треугольника.

$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{5}}$

50. В прямоугольный треугольник с гипотенузой a и острым углом 30° вписан прямоугольник, одна сторона которого вдвое больше другой. Бóльшая сторона прямоугольника находится на гипотенузе, а противоположные ей вершины — на катетах. Найдите меньшую сторону прямоугольника.

$a\left(\sqrt{3}-\frac{3}{2}\right)$

51. На катете BC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая гипотенузу AB в точке K. Найдите CK, если $BC = a$ и $AC = b$.

$\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$

52. На боковой стороне равнобедренного треугольника как на диаметре построена окружность, делящая вторую боковую сторону на отрезки m и n. Найдите основание треугольника.

$\sqrt{2m(m+n)}$ или $\sqrt{2n(m+n)}$

53. На катете BC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая гипотенузу AB в точке D так, что $AD : DB = 1 : 3$. Высота, опущенная на гипотенузу, равна 3. Найдите катет BC.

$\boxed{6}$

54. В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота из вершины C прямого угла. На этой высоте как на диаметре построена окружность. Известно, что эта окружность высекает на катетах отрезки, равные 12 и 18. Найдите катеты треугольника ABC.

$\boxed{26 \text{ и } 39}$

55. Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна a и образует угол α с медианой, проведённой из той же вершины. Найдите катеты треугольника.

$\boxed{\frac{a\sqrt{2(1\pm\sin\alpha)}}{\cos\alpha}}$

56. В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки длиной 5 и 12. Найдите катеты треугольника.

$\boxed{8 \text{ и } 15}$

57. Биссектрисы тупых углов при основании трапеции пересекаются на другом основании. Найдите все стороны трапеции, если её высота равна 12, а биссектрисы равны 13 и 15.

$\boxed{14,\ 12{,}5,\ 29{,}4,\ 16{,}9}$

58. Диагональ AC равнобедренной трапеции $ABCD$ и образует с бóльшим основанием AD и боковой стороной AB углы α и β соответственно. Найдите основания трапеции.

$\boxed{a(\cos\alpha \pm \sin\alpha\,\mathrm{ctg}(\alpha+\beta))}$

59. Найдите диагонали трапеции со сторонами 1, 1, 1, 2.

$\boxed{\sqrt{3}}$

60. Основания трапеции равны 3 и 5, одна из диагоналей перпендикулярна боковой стороне, а другая делит пополам угол при большем основании. Найдите высоту трапеции.

$\boxed{\frac{12}{5}}$

61. Боковая сторона AD и основание CD трапеции $ABCD$ равны a, основание AB равно $2a$, а диагональ AC равна b. Найдите боковую сторону BC.

$\boxed{\sqrt{4a^2-b^2}}$

62. Катеты прямоугольного треугольника равны 21 и 28. Окружность с центром на гипотенузе касается обоих катетов. Найдите радиус окружности.

$\boxed{12}$

63. Через середину гипотенузы прямоугольного треугольника проведён к ней перпендикуляр. Отрезок этого перпендикуляра, заключённый внутри треугольника, равен c, а отрезок, заключённый между одним катетом и продолжением другого, равен $3c$. Найдите гипотенузу.

$\boxed{4c}$

64. Окружность, вписанная в трапецию, делит её боковую сторону на отрезки p и q. Найдите радиус окружности.

$\boxed{\sqrt{pq}}$

65. Окружность радиуса R вписана в прямоугольную трапецию, меньшее основание которой равно $4R/3$. Найдите остальные стороны трапеции.

$\boxed{2R,\ 10R/3,\ 4R}$

66. Окружности радиусов R и r касаются внешним образом. Найдите длину отрезка их общей касательной, заключённого между точками касания.

$\boxed{2\sqrt{Rr}}$

67. Даны окружности радиусов R и r $(R > r)$. Расстояние между центрами этих окружностей равно a $(a > R+r)$. Найдите отрезки общих внешних и внутренних касательных, заключённые между точками касания.

$\boxed{\sqrt{a^2-(R+r)^2} \text{ и } \sqrt{a^2-(R-r)^2}}$

68. Окружности радиусов R и r $(R > r)$ касаются внешним образом в точке K. К ним проведены две общие внешние касательные. Их точки касания с меньшей окружностью — A и D, с большей — B и C соответственно. а) Найдите отрезок MN общей внутренней касательной, заключённый между внешними касательными. б) Докажите, что углы AKB и O_1MO_2 прямые (O_1 и O_2 — центры окружностей). в) Найдите радиусы окружностей, касающихся обеих данных окружностей и их общей внешней касательной.

$\boxed{\text{а) } 2\sqrt{Rr};\ \text{в) } \frac{Rr}{(\sqrt{R}\pm\sqrt{r})^2}}$

69. В трапеции $ABCD$ меньшая диагональ BD перпендикулярна основаниям AD и BC, сумма острых углов A и C равна 90°. Основания $AD = a$, $BC = b$. Найдите боковые стороны трапеции.

$\boxed{\sqrt{a(a+b)},\ \sqrt{b(a+b)}}$

70. Отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, равен 3. Углы при большем основании трапеции равны 30° и 60°. Найдите высоту трапеции.

$\boxed{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$

71. Стороны параллелограмма равны a и b $(a > b)$, угол между ними равен α. Найдите стороны и диагонали четырёхугольника, образованного пересечениями биссектрис внутренних углов параллелограмма.

$\boxed{(a-b)\sin\frac{\alpha}{2},\ (a-b)\cos\frac{\alpha}{2},\ a-b,\ a-b}$

72. Вне прямоугольного треугольника ABC на его катетах AC и BC построены квадраты $ACDE$ и $BCFG$. Продолжение медианы CM треугольника ABC пересекает прямую DF в точке N. Катеты равны 1 и 4. Найдите CN.

$\boxed{\frac{4}{\sqrt{17}}}$

73. Основание CD, диагональ BD и боковая сторона AD трапеции $ABCD$ равны p. Боковая сторона BC равна q. Найдите диагональ AC.

$\boxed{\sqrt{4p^2 - q^2}}$

74. Хорды AB и CD окружности радиуса R пересекаются под прямым углом. Найдите BD, если $AC = a$.

$\boxed{\sqrt{4R^2 - a^2}}$

75. На гипотенузе прямоугольного треугольника с катетами a и b во внешнюю сторону построен квадрат. Найдите расстояние от вершины прямого угла треугольника до центра квадрата.

$\boxed{\frac{a+b}{\sqrt{2}}}$

76. Высоты треугольника равны 12, 15 и 20. Докажите, что этот треугольник прямоугольный.

77. В круге проведены диаметры AB и CD. M — некоторая точка. Известно, что $AM = 15$, $BM = 20$ и $CM = 24$. Найдите DM.

$\boxed{7}$

78. Катет прямоугольного треугольника равен 2, противолежащий ему угол равен $30°$. Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники, на которые данный треугольник делится медианой, проведённой из вершины прямого угла.

$\boxed{\sqrt{\frac{88-48\sqrt{3}}{3}}}$

79. В прямоугольном треугольнике с углом $30°$ радиус вписанной окружности равен r. Найдите расстояние между центром вписанной окружности и центром вневписанной окружности, касающейся меньшего катета. (Окружность называется *вневписанной*, если она касается стороны треугольника и продолжений двух других сторон.)

$\boxed{2r\sqrt{2}}$

80. Найдите радиус вписанной окружности и радиусы трёх вневписанных окружностей треугольника со сторонами: а) 5, 12, 13; б) 10, 10, 12.

$\boxed{\text{а) 2, 3, 10, 15; б) 3, 8, 8, 12}}$

81. В треугольнике PQR угол QRP равен $60°$. Окружность радиуса 2 вписана в этот треугольник, а вневписанная окружность радиуса 3 касается продолжений сторон PQ и PR. Найдите расстояние между точками касания этих окружностей со стороной QR.

$\boxed{\sqrt{3}}$

82. Радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, равен $\sqrt{3} - 1$. Радиус вневписанной окружности, касающейся стороны BC, равен $\sqrt{3} + 1$. Угол A треугольника равен $60°$. Найдите углы B и C.

$\boxed{30° \text{ и } 90°}$

83. Дана окружность радиуса 2 с центром O. Из конца отрезка OA, пересекающегося с окружностью в точке M, проведена касательная AK к окружности (K — точка касания). Угол OAK равен $60°$. Найдите радиус окружности, касающейся отрезков AK, AM и дуги MK.

$\boxed{2 - \frac{4\sqrt{2}}{3}}$

84. К двум окружностям, касающимся внешним образом в точке C, проведена общая внешняя касательная, A и B — точки касания. Найдите радиусы окружностей, если $AC = 6$, $BC = 8$.

$\boxed{\frac{15}{4} \text{ и } \frac{20}{3}}$

85. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса R. Его диагонали перпендикулярны и пересекаются в точке P. Найдите $AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2$ и $AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2$.

$\boxed{8R^2 \text{ и } 4R^2}$

86. Три окружности радиусов 1, 2 и 3 касаются друг друга внешним образом. Найдите радиус окружности, проходящей через точки касания данных окружностей.

$\boxed{1}$

87. Прямоугольный треугольник ABC ($\angle A = 90°$) и два квадрата $BEFC$ и $AMNB$ расположены так, что точки A и E лежат по разные стороны от прямой BC, а точки C и M — по разные стороны от прямой AB. Найдите расстояние между центрами квадратов, если $AB = b$, $AC = a$.

$\boxed{\sqrt{\frac{a^2}{2} + ab + b^2}}$

88. На высотах BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC взяты точки B_2 и C_2 так, что $\angle AB_2C = \angle AC_2B = 90°$. Докажите, что $AB_2 = AC_2$.