

Симметрия в задачах с параметрами

Симметрия — одно из ключевых понятий математики и физики. Вы знакомы с геометрической симметрией фигур и вообще различных объектов природы. Однако математические представления о симметрии распространяются гораздо шире: оказывается, например, что можно говорить о симметрии некоторых уравнений. Так, уравнения, выражающие фундаментальные физические законы, обладают определённой симметрией; это свидетельствует о том, что симметрия принадлежит к числу наиболее глубоких свойств нашего мира.

Что же такое симметрия уравнений? Мы не будем сейчас стремиться к строгим определениям и ограничимся следующим описанием. *Если при некотором преобразовании переменных уравнение не меняет своего вида («переходит само в себя»), то мы говорим, что это уравнение симметрично относительно данного преобразования¹.*

Почему бывает важно замечать симметрию уравнений? Дело в том, что если уравнение обладает некоторой симметрией, то такой же симметрией обладают и все его решения. Значит, не решая уравнение и исходя лишь из соображений симметрии, мы можем заранее предвидеть некоторые свойства его решений!

Допустим, например, что требуется найти такие значения параметра, при которых уравнение имеет заданное число решений. Тогда, заметив симметрию данного уравнения, мы сможем получить необходимые условия на параметр, и останется лишь проверить, какие из найденных условий являются достаточными.

Задача 1. (МГУ, мехмат, 1990) Найдите все значения параметра b , при которых уравнение

$$b^2 x^2 - b \operatorname{tg}(\cos x) + 1 = 0 \quad (1)$$

имеет единственное решение.

Решение. Обратите внимание, что уравнение (1) не меняет своего вида при замене x на $-x$ (ведь x^2 и $\cos x$ — чётные функции). Иными словами, уравнение (1) симметрично относительно преобразования $x \mapsto -x$ (то есть относительно отражения в начале координат).

Следовательно, данной симметрией будут обладать и решения нашего уравнения. Именно, если x_0 — корень уравнения (1), то и число $-x_0$ будет его корнем; иначе говоря, решения уравнения (1) расположены симметрично относительно нуля. Вместе с тем, в задаче требуется, чтобы решение было только одно.

Единственная возможность — корнем уравнения (1) является нуль, и только он. В самом деле, если уравнение имеет ненулевое решение, то всего решений будет как минимум два. Подставляя $x = 0$ в уравнение (1), получим

$$-b \operatorname{tg} 1 + 1 = 0,$$

откуда

$$b = \operatorname{ctg} 1. \quad (2)$$

¹Мы сейчас не делаем различия между уравнениями и системами уравнений. Да его, в общем-то, и нет; например, система уравнений

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

равносильна уравнению $|f(x, y)| + |g(x, y)| = 0$. Поэтому, говоря о симметрии уравнений, мы имеем в виду также и симметрию систем уравнений.

Это — *необходимое* условие на b (только при таком b наше уравнение может иметь нулевое решение). Теперь вопрос в том, является ли это условие *достаточным*; то есть, окажется ли при $b = \operatorname{ctg} 1$ нулевое решение и в самом деле единственным, или же уравнение (1) будет иметь и другие корни помимо нуля.

Для выяснения достаточности условия (2) подставим данное значение b в уравнение (1):

$$\operatorname{ctg}^2 1 \cdot x^2 - \operatorname{ctg} 1 \cdot \operatorname{tg}(\cos x) + 1 = 0.$$

Перепишем это следующим образом:

$$\frac{\operatorname{tg}(\cos x)}{\operatorname{tg} 1} = 1 + \frac{x^2}{\operatorname{tg}^2 1}. \quad (3)$$

Тангенс является возрастающей функцией на интервале $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$. Косинус, являющийся аргументом тангенса, принимает значения из отрезка $[-1; 1]$, а этот отрезок находится внутри интервала $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$. Следовательно, справедливо неравенство $\operatorname{tg}(\cos x) \leq \operatorname{tg} 1$, то есть левая часть уравнения (3) не превосходит 1. В то же время правая часть (3) не меньше 1, и равенство возможно лишь в том случае, когда обе они равны 1, то есть при $x = 0$.

Итак, мы показали, что условие (2) является достаточным: при $b = \operatorname{ctg} 1$ уравнение (1) имеет единственное (нулевое) решение.

Ответ: $b = \operatorname{ctg} 1$.

Задача 2. (МГУ, химический ф-т, 2002) Найти все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$9^{-x+1} \cdot 3^{x^2} + a^3 + 5a^2 + a + \sqrt{2} = \sin \frac{\pi x}{4} + \cos \frac{\pi x}{4} + 3$$

имеет единственное решение.

Решение. Обозначим $b = a^3 + 5a^2 + a$. Имеем:

$$9 \cdot 3^{x(x-2)} + b + \sqrt{2} = \sin \frac{\pi x}{4} + \cos \frac{\pi x}{4} + 3. \quad (4)$$

Оказывается, данное уравнение не меняет своего вида при замене x на $2 - x$ (это отражение в точке $x = 1$). В самом деле, посмотрим, как преобразуются выражения с переменной при преобразовании $x \mapsto 2 - x$:

$$\begin{aligned} x(x-2) &\mapsto (2-x)(2-x-2) = (x-2)x; \\ \sin \frac{\pi x}{4} + \cos \frac{\pi x}{4} &\mapsto \sin \frac{\pi(2-x)}{4} + \cos \frac{\pi(2-x)}{4} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{4} \right) + \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{4} \right) = \\ &= \cos \frac{\pi x}{4} + \sin \frac{\pi x}{4}. \end{aligned}$$

Итак, уравнение (4) симметрично относительно преобразования $x \mapsto 2 - x$. Следовательно, если x_0 — корень уравнения (4), то и $2 - x_0$ также будет его корнем. Поэтому единственным решением уравнения (4) может быть только неподвижная точка преобразования $x \mapsto 2 - x$:

$$x = 2 - x \quad \Rightarrow \quad x = 1.$$

Подставляя $x = 1$ в уравнение (4), получим:

$$3 + b + \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + 3,$$

откуда $b = 0$. Это — необходимое условие единственности решения уравнения (4), и теперь надо выяснить, является ли оно достаточным.

Подставляем $b = 0$ в уравнение (4):

$$9 \cdot 3^{x(x-2)} + \sqrt{2} = \sin \frac{\pi x}{4} + \cos \frac{\pi x}{4} + 3,$$

или

$$3^{1+(x-1)^2} - 3 = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi x}{4} + \frac{\pi}{4} \right) - \sqrt{2}. \quad (5)$$

Левая часть уравнения (5) неотрицательна, а правая часть — неположительна. Поэтому равенство возможно лишь в том случае, когда обе части одновременно равны нулю, то есть при $x = 1$. Тем самым показано, что при $b = 0$ уравнение (4) в самом деле имеет единственное решение $x = 1$.

Остаётся найти соответствующие значения параметра a :

$$a^3 + 5a^2 + a = 0 \Leftrightarrow a(a^2 + 5a + 1) = 0 \Leftrightarrow a = 0, \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}.$$

Ответ: $a = 0, \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$.

Задача 3. Найти все значения a , при которых уравнение

$$x + \frac{1}{x} + \frac{a}{1 + \left| x - \frac{1}{x} \right|} = a^2 \quad (6)$$

имеет единственное решение.

Решение. Легко видеть, что уравнение (6) не меняет своего вида при преобразовании $x \mapsto \frac{1}{x}$ (такое преобразование называется инверсией). Следовательно, наряду с решением x_0 имеется также решение $\frac{1}{x_0}$, и поэтому единственным решением уравнения (6) может быть лишь неподвижная точка нашего преобразования:

$$x = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \pm 1.$$

Подставляя $x = -1$ в уравнение (6), получим $a^2 - a + 2 = 0$; тут корней нет. Подставляя $x = 1$ в уравнение (6), получим $a^2 - a - 2 = 0$, то есть $a = -1$ или $a = 2$. Это — необходимые условия на параметр a . Проверим, достаточны ли они.

Пусть $a = -1$. Тогда уравнение (6) примет вид:

$$x + \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{1 + \left| x - \frac{1}{x} \right|}. \quad (7)$$

Если $x < 0$, то левая часть уравнения (7) отрицательна, а правая часть положительна, так что решений быть не может. Если же $x > 0$, то левая часть (7) не меньше 2 (как сумма двух взаимно обратных положительных чисел), а правая часть — не больше 2 (поскольку к единице прибавляется дробь, не превосходящая единицу). Следовательно, равенство (7) возможно лишь тогда, когда обе части одновременно равны 2, то есть при $x = 1$. Итак, $a = -1$ годится: в этом случае уравнение (6) действительно имеет единственное решение $x = 1$.

Пусть теперь $a = 2$. Уравнение (6) примет вид:

$$x + \frac{1}{x} + \frac{2}{1 + \left| x - \frac{1}{x} \right|} = 4. \quad (8)$$

Рассмотрим функцию в левой части уравнения (8):

$$f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{2}{1 + \left|x - \frac{1}{x}\right|}.$$

Мы видим, что $f(1) = 4$, и теперь нас интересует, является ли $x = 1$ единственным корнем уравнения $f(x) = 4$.

Нетрудно понять, что это не так. В самом деле, имеем $f(4) > 4$ и в то же время $f(2) = \frac{33}{10} < 4$. Функция f непрерывна при $x \neq 0$, и поэтому на интервале $(2; 4)$ найдётся значение x , при котором выполнено равенство $f(x) = 4$. Значит, условие $a = 2$ не является достаточным для единственности решения, и потому значение $a = 2$ не годится.

Ответ: $a = -1$.

Задача 4. (МГУ, химический ф-т, 2005) При каких значениях параметра a уравнение

$$|x| + \left| \frac{2x-1}{3x-2} \right| = a \quad (9)$$

имеет ровно три решения?

Решение. Оказывается, симметрией уравнения (9) служит преобразование

$$x \mapsto \frac{2x-1}{3x-2}. \quad (10)$$

В самом деле, при этом преобразовании первое слагаемое левой части уравнения переходит во второе, а второе слагаемое — в первое:

$$\frac{2x-1}{3x-2} \mapsto \frac{2\frac{2x-1}{3x-2}-1}{3\frac{2x-1}{3x-2}-2} = \frac{2(2x-1) - (3x-2)}{3(2x-1) - 2(3x-2)} = x.$$

Уравнение (9) при преобразовании (10) переходит само в себя, так что наряду с решением x_0 будет и решение $\frac{2x_0-1}{3x_0-2}$. Поэтому для того, чтобы решений было ровно три, необходимо, чтобы одним из решений была неподвижная точка нашего преобразования:

$$x = \frac{2x-1}{3x-2} \Rightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ или } x = \frac{1}{3}.$$

Подставляя поочерёдно $x = 1$ и $x = \frac{1}{3}$ в уравнение (9), получаем соответственно $a = 2$ и $a = \frac{2}{3}$. Это — необходимые условия на параметр a . Теперь надо проверить их достаточность, то есть подставить полученные значения a в уравнение (9) и выяснить, действительно ли получается ровно три решения (а не какое-то другое нечётное число) в каждом из этих случаев.

Пусть $a = 2$. Уравнение (9) примет вид:

$$|x| + \left| \frac{2x-1}{3x-2} \right| = 2. \quad (11)$$

Решаем данное уравнение, снимая модули на промежутках $(-\infty; 0]$, $[0; \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}; \frac{2}{3})$ и $(\frac{2}{3}; +\infty)$.

1. $x > \frac{2}{3}$ или $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$. Тогда

$$x + \frac{2x-1}{3x-2} = 2 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Условие $x > \frac{2}{3}$ выполнено, так что $x = 1$ — корень уравнения (11).

2. $\frac{1}{2} \leq x < \frac{2}{3}$. Тогда

$$x - \frac{2x-1}{3x-2} = 2 \Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{10}}{3}.$$

Первый корень $\frac{5+\sqrt{10}}{3}$ больше 1 и потому не принадлежит рассматриваемому промежутку. Для второго корня имеем оценки:

$$\begin{aligned} \frac{5 - \sqrt{10}}{3} - \frac{1}{2} &= \frac{7 - 2\sqrt{10}}{6} = \frac{\sqrt{49} - \sqrt{40}}{6} > 0; \\ \frac{5 - \sqrt{10}}{3} - \frac{2}{3} &= \frac{3 - \sqrt{10}}{3} = \frac{\sqrt{9} - \sqrt{10}}{3} < 0. \end{aligned}$$

Таким образом, число $\frac{5-\sqrt{10}}{3}$ принадлежит рассматриваемому промежутку и потому является корнем уравнения (11).

3. $x \leq 0$. Тогда

$$-x + \frac{2x-1}{3x-2} = 2 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{10}}{3}.$$

Рассматриваемому промежутку принадлежит число $\frac{-1-\sqrt{10}}{3}$, которое, таким образом, является корнем уравнения (11).

Итак, уравнение (11) имеет ровно три корня, так что значение $a = 2$ подходит. Точно так же убеждаемся (сделайте это самостоятельно!), что и в случае $a = \frac{2}{3}$ тоже получается ровно три корня. Здесь оба необходимых условия оказались к тому же достаточными.

Ответ: $a = 2$ или $a = \frac{2}{3}$.

Задача 5. При каких значениях a система

$$\begin{cases} ax^2 + a - 1 = y - |\sin x|, \\ \operatorname{tg}^2 x + y^2 = 1 \end{cases} \quad (12)$$

имеет единственное решение?

Решение. Система не меняет своего вида при замене x на $-x$; иными словами, система (12) симметрична относительно преобразования $(x, y) \mapsto (-x, y)$ (которое является отражением координатной плоскости относительно оси ординат). Следовательно, наряду с решением (x_0, y_0) система (12) будет иметь также решение $(-x_0, y_0)$, и поэтому случай единственного решения возможен лишь при $x_0 = 0$ (то есть когда решением системы служит неподвижная точка преобразования, расположенная на оси ординат).

Подставляя в (12) значение $x = 0$, получим систему

$$\begin{cases} a - 1 = y, \\ y^2 = 1, \end{cases}$$

из которой легко находим $a = 2$ или $a = 0$. Это необходимые условия единственности решения; проверим, являются ли они достаточными.

Пусть $a = 2$. Тогда система (12) примет вид:

$$\begin{cases} 2x^2 + 1 = y - |\sin x|, \\ \operatorname{tg}^2 x + y^2 = 1 \end{cases} \quad (13)$$

Из второго уравнения (13) мы видим, что $|y| \leq 1$. Поэтому для правой части первого уравнения имеем оценку: $y - |\sin x| \leq 1$. В то же время его левая часть: $2x^2 + 1 \geq 1$, так что равенство в первом уравнении (13) возможно лишь в случае одновременного равенства обеих частей единице, то есть при $x = 0, y = 1$. Пара $(0, 1)$ удовлетворяет также второму уравнению и потому является единственным решением системы (13). Стало быть, значение $a = 2$ нам подходит.

Пусть теперь $a = 0$. Система (12) примет вид:

$$\begin{cases} -1 = y - |\sin x|, \\ \operatorname{tg}^2 x + y^2 = 1. \end{cases}$$

Можно указать два решения полученной системы: $(0, -1)$ и $(\pi, -1)$. Следовательно, значение $a = 0$ не годится.

Ответ: $a = 2$.

Задача 6. (МГУ, филологич. ф-т, 2002) Найти все a , при которых система

$$\begin{cases} y \geq (x - a)^2, \\ x \geq (y - a)^2 \end{cases} \quad (14)$$

имеет единственное решение.

Решение. Заметим, что система (14) переходит сама в себя при замене x на y и y на x . Иными словами, наша система симметрична относительно преобразования $(x, y) \mapsto (y, x)$, которое является отражением координатной плоскости относительно прямой $y = x$ (рис. 1).

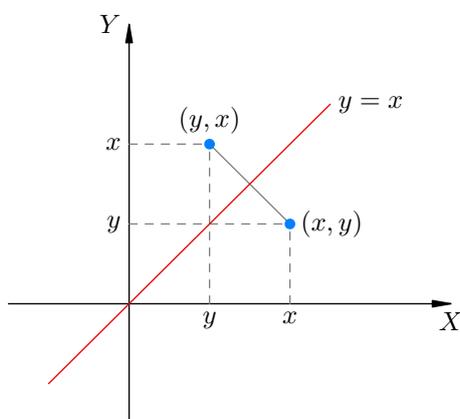


Рис. 1. Отражение $(x, y) \mapsto (y, x)$

Следовательно, наряду с решением (x_0, y_0) система имеет также решение (y_0, x_0) . Поэтому для того, чтобы система (14) имела единственное решение, необходимо, чтобы выполнялось равенство $x_0 = y_0$ (то есть чтобы решением системы служила неподвижная точка преобразования, расположенная на прямой $y = x$).

Полагая в системе $y = x$, получим неравенство

$$x \geq (x - a)^2 \Leftrightarrow x^2 - (2a + 1)x + a^2 \leq 0. \quad (15)$$

Но на прямой $y = x$ должна быть лишь одна точка, являющаяся решением нашего неравенства; поэтому полученное квадратное неравенство (15) должно иметь единственное решение. Значит, дискриминант должен обратиться в нуль:

$$D = (2a + 1)^2 - 4a^2 = 0,$$

откуда $a = -\frac{1}{4}$. Это — необходимое условие на параметр, и нужно проверить его достаточность.

Подставляем $a = -\frac{1}{4}$ в систему (14):

$$\begin{cases} y \geq \left(x + \frac{1}{4}\right)^2, \\ x \geq \left(y + \frac{1}{4}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \frac{x}{2} - y + \frac{1}{16} \leq 0, \\ y^2 + \frac{y}{2} - x + \frac{1}{16} \leq 0. \end{cases}$$

Сложим неравенства полученной системы:

$$x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{16} + y^2 - \frac{y}{2} + \frac{1}{16} \leq 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2 \leq 0.$$

Единственным решением данного неравенства будет пара $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$. Она же будет единственным решением системы (14) при $a = -\frac{1}{4}$, что мы и хотели проверить.

Ответ: $a = -\frac{1}{4}$.

Во всех рассмотренных задачах наблюдалась симметрия относительно какого-то одного преобразования. Однако симметрий может быть несколько!

Задача 7. Найти все значения a , при которых система

$$\begin{cases} |x| + |y| = 1, \\ x^2 + y^2 = a \end{cases} \quad (16)$$

имеет ровно четыре решения.

Решение. Система не меняет своего вида, если заменить x на $-x$, или y на $-y$, или поменять местами x и y . Иными словами, система (16) симметрична относительно преобразований

$$(x, y) \mapsto (-x, y), \quad (x, y) \mapsto (x, -y), \quad (x, y) \mapsto (y, x).$$

Следовательно, если (x_0, y_0) — решение системы (16), то решениями будут также пары $(-x_0, y_0)$, $(x_0, -y_0)$, $(-x_0, -y_0)$, (y_0, x_0) , $(-y_0, x_0)$, $(y_0, -x_0)$, $(-y_0, -x_0)$. Все эти пары получаются в результате последовательных отражений исходной точки относительно координатных осей и прямых $y = \pm x$ (рис. 2).

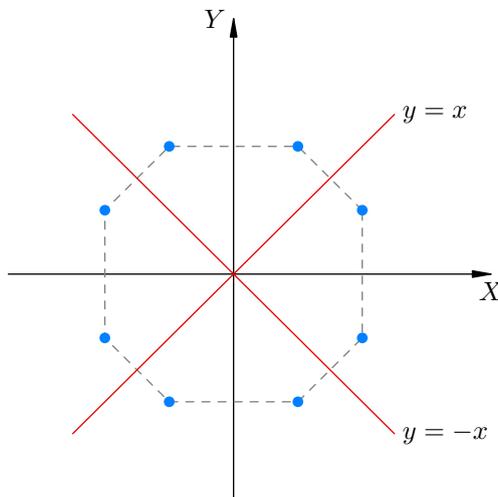


Рис. 2. Симметрия решений системы (16)

Таким образом, если система (16) имеет решение, расположенное вне прямых $x = 0$, $y = 0$, $y = \pm x$, то у этой системы будет не менее восьми решений. Ровно четыре решения система может иметь лишь в том случае, когда она имеет решение, расположенное на одной из прямых $x = 0$, $y = 0$, $y = \pm x$ (тогда восьмиугольник вырождается в квадрат, рис. 3).

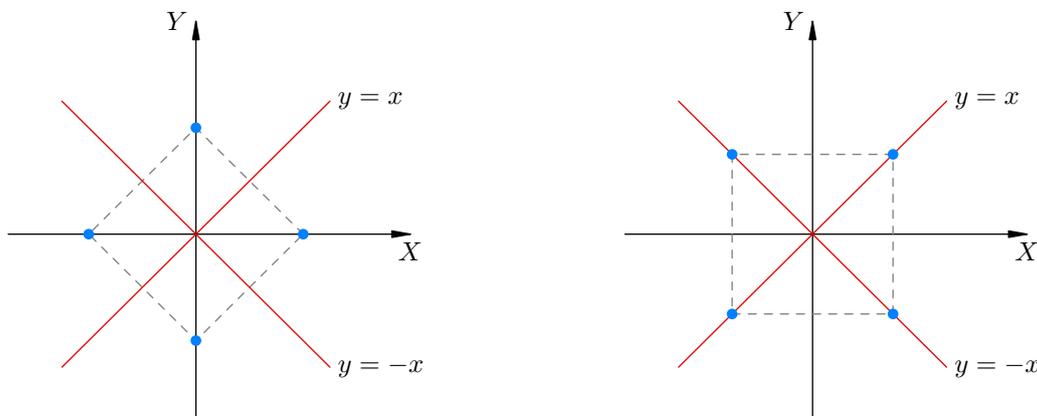


Рис. 3. Система (16) имеет ровно четыре решения

Если $x = 0$ или $y = 0$, то из системы (16) получаем $a = 1$. Если же $y = \pm x$ (то есть $|y| = |x|$), то из системы (16) получаем $a = \frac{1}{2}$. Это необходимые условия на параметр. Остаётся проверить, достаточны ли они.

Пусть $a = 1$. Тогда система (16) примет вид:

$$\begin{cases} |x| + |y| = 1, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases} \quad (17)$$

Делаем замену $u = |x|$, $v = |y|$:

$$\begin{cases} u + v = 1, \\ u^2 + v^2 = 1. \end{cases}$$

Решаем эту систему и убеждаемся, что у неё ровно два решения: $u = 1, v = 0$ и $u = 0, v = 1$. Эти две пары (u, v) дают ровно четыре пары (x, y) решений системы (17): $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(0, -1)$. Таким образом, значение $a = 1$ годится.

Пусть теперь $a = \frac{1}{2}$. Тогда система (16) примет вид:

$$\begin{cases} |x| + |y| = 1, \\ x^2 + y^2 = \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (18)$$

Снова делаем замену $u = |x|$, $v = |y|$:

$$\begin{cases} u + v = 1, \\ u^2 + v^2 = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение $u = v = \frac{1}{2}$, которое даёт ровно четыре решения системы (18): $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. Следовательно, значение $a = \frac{1}{2}$ также является подходящим.

Ответ: $a = 1$ или $a = \frac{1}{2}$.

Задачи

1. («Высшая проба», 2012, 9.5) При каких значениях b , $b \neq 3$, объединение парабол $y = x^2$ и $y = (b - 3)x^2 + bx + 2b - 4$ имеет ось или центр симметрии?

$\{7, 2, 0\} \ni 9$

2. («Высшая проба», 2012, 11.3) При каком значении параметра a график многочлена

$$x^4 - 6x^3 + 12x^2 + ax$$

симметричен относительно прямой $x = c$ для какого-нибудь значения константы c ?

$6 = 0$

3. (ОММО, 2018.8) При каких значениях параметра a уравнение

$$3^{x^2 - 2ax + a^2} = ax^2 - 2a^2x + a^3 + a^2 - 4a + 4$$

имеет ровно одно решение?

$1 = 0$

4. («Покори Воробьёвы горы!», 2012.4) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых графики функций

$$f(x) = 3^{2x^2 - 4x + 3} + a^3 \quad \text{и} \quad g(x) = a \cdot 3^{x^2 - 2x + 3} - 5$$

имеют ровно три общие точки.

$\frac{7}{8} \sqrt{1+1} = 1$

5. («Покори Воробьёвы горы!», 2017.5) Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} 1 - \sqrt{|x-1|} = \sqrt{3|y|}, \\ x^2 + 9y^2 + a = 2x - 1 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

$\frac{8}{1} = 1$

6. («Покори Воробьёвы горы!», 2016.5) Найдите все значения a , при которых имеет единственное решение система

$$\begin{cases} (x^2 + 1)a = y - \cos x, \\ \sin^4 x + |y| = 1. \end{cases}$$

$7 = 0$

7. («Покори Воробьёвы горы!», 2014.5) Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} y - a^2 + 5(a - 1) = (a^2 - 5a + 6)(x - 3)^6 + \sqrt{(x - 3)^2}, \\ x^2 + y^2 = 2(3x - 4) \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

$$\boxed{v = 0 \text{ или } 1 = v}$$

8. («Покори Воробьёвы горы!», 2014.5) Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$2 \frac{(x+1)^2}{x^2+1} + a^2 - 4 = 2a \cos\left(\frac{x^2 - 1}{2x}\right)$$

имеет единственное решение.

$$\boxed{v = 0 \text{ или } 0 = v}$$

9. («Покори Воробьёвы горы!», 2019, 10–11.5) Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$a^2(x^2 + 1)^3 + (x^3 + 1)^2 = 12ax^3$$

имеет единственное решение.

$$\boxed{1; \frac{2}{3}; 0; \frac{2}{3}}$$

10. («Физтех», 2009) Найдите, при каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} x - y^2 - a = 0, \\ x^2 - y + a = 0. \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$$\boxed{\frac{1}{2}}$$

11. (МГУ, ф-т почвоведения, 2001) При каких значениях b уравнение

$$\operatorname{tg} |b| = \log_2(\cos x - |x|)$$

имеет ровно один корень?

$$\boxed{\mathbb{Z} \ni u \text{ или } u = q}$$

12. (МГУ, мехмат, 1990.4) Найти все a , при которых уравнение

$$x^2 - 2a \sin \cos x + a^2 = 0$$

имеет единственный корень.

$$\boxed{1 \text{ или } 2 = v \text{ или } 0 = v}$$

13. (МГУ, геологич. ф-т, 2003) При каких значениях a уравнение

$$2\pi^2(x-2)^2 + 4a \cos(2\pi x) - 25a^3 = 0$$

имеет единственное решение?

$$\frac{1}{2}a = v$$

14. (МГУ, физический ф-т, 1999) При каких значениях a уравнение

$$\cos 2x + 2 \cos x - 2a^2 - 2a + 1 = 0$$

имеет ровно одно решение на промежутке $[0; 2\pi)$?

$$\frac{1}{2}a = v$$

15. (МГУ, ф-т психологии, 1995) Найти все a , при которых неравенство

$$\cos x - 2\sqrt{x^2 + 9} \leq -\frac{x^2 + 9}{a + \cos x} - a$$

имеет единственное решение.

$$\frac{1}{2}a = v$$

16. (МГУ, химический ф-т, 1999) Найти все a , при которых уравнение

$$\left| \frac{x(2^x - 1)}{2^x + 1} + 2a \right| = a^2 + 1$$

имеет нечётное число корней.

$$\frac{1}{2}a = v$$

17. (МГУ, химический ф-т, 2002) Найти все значения a , при которых уравнение

$$2^{-x^2} \cdot 4^x + \sin \frac{\pi x}{4} + \cos \frac{\pi x}{4} - 2 = a^3 - 3a^2 + a + \sqrt{2}$$

имеет единственное решение.

$$\frac{1}{2}a = v$$

18. (МГУ, ВМК, 1998) Найти все a , при которых уравнение

$$2^{\frac{2x}{1+x^2}} + a \cos \frac{x^2 - 1}{x} + a^2 = \frac{5}{4}$$

имеет единственный корень.

$$\frac{1}{2}a = v$$

19. (МГУ, химический ф-т, 2005) При каких значениях параметра a уравнение

$$|x| + \left| \frac{x+1}{3x-1} \right| = a$$

имеет ровно три решения?

$$\zeta = v$$

20. (МГУ, экономич. ф-т, 2002) Найти все a , при которых неравенство

$$\sqrt[4]{x^2 - 6ax + 10a^2} + \sqrt[4]{3 + 6ax - x^2 - 10a^2} \geq \sqrt[4]{\sqrt{3a + 24} - \frac{3}{\sqrt{2}} + |y - \sqrt{2}a^2| + |y - \sqrt{3}a|}$$

имеет единственное решение.

$$\frac{\zeta}{\sqrt{2}} \wedge = v$$

21. (МГУ, экономич. ф-т, 2005) Найти все b , при которых уравнение

$$b^2 \sin\left(\frac{\pi+2}{2} - x\right) + \sin^2\left(\frac{2x}{b+1} - \frac{2}{b+1}\right) - b\sqrt{4x^2 + 8 - 8x} = 3 + \arcsin|1-x|$$

имеет единственное решение.

$$\xi = q$$

22. Найти все значения a , при которых система

$$\text{а) } \begin{cases} (|x| + 1)a = y + \cos x, \\ \sin^4 x + y^2 = 1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2^{|x|} + |x| = y + x^2 + a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$$0 = v \text{ (} \zeta = v \text{)}$$

23. (МГУ, МШЭ, 2005) Найти все b , при которых система

$$\begin{cases} (x^2 + 1)b = y + \cos 2x, \\ 2^{|\sin x|} + |y| = 2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$$\zeta = q$$

24. (МГУ, экономич. ф-т, 1987) Найти все a , при которых система

$$\begin{cases} 3 \cdot 2^{|x|} + 5|x| + 4 = 3y + 5x^2 + 3a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$$\frac{\xi}{v} = v$$

25. (МГУ, ф-т почвоведения, 2007) Найти все a , при которых система

$$\begin{cases} (5 - 2\sqrt{6})^x + (5 + 2\sqrt{6})^x - 5a = y - |y| - 8, \\ x^2 - (a - 4)y = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$$\boxed{\eta = \nu \text{ или } \zeta = \nu}$$

26. (МГУ, экономич. ф-т, 1990) Найти все a , при которых система

$$\begin{cases} (3 - 2\sqrt{2})^y + (3 + 2\sqrt{2})^y - 3a = x^2 + 6x + 5, \\ y^2 - (a^2 - 5a + 6)x^2 = 0, \\ -6 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$$\boxed{\zeta, \eta = \nu}$$

27. (МГУ, ИСАА, 1991) При каких значениях b система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ |y| - x = b \end{cases}$$

имеет ровно три решения?

$$\boxed{\zeta \wedge \eta = \nu}$$

28. (МГУ, ф-т почвоведения, 1995) При каких значениях b система

$$\begin{cases} 4y = 4b + 3 - x^2 + 2x, \\ x^2 + y^2 = 2x \end{cases}$$

имеет два решения?

$$\boxed{(0; \zeta - \eta) \ni \nu}$$

29. (МГУ, ИСАА, 1998) При каких значениях a система

$$\begin{cases} x^4 - (a - 1)\sqrt{a + 3} \cdot y + a^4 + 2a^3 - 9a^2 - 2a + 8 = 0, \\ y = \sqrt{a + 3} \cdot x^2 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения?

$$\boxed{\zeta = \nu}$$

30. (МГУ, ф-т гос. управления, 2002) Найти все a , при которых система

$$\begin{cases} (3\sqrt{x|x|} + |y| - 3)(|x| + 3|y| - 9) = 0, \\ (x - a)^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

$$\boxed{9 \cdot 14 = a}$$

31. (МГУ, физический ф-т, 1981) Найти все a , при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y = a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$$\boxed{2 \wedge 4 = a}$$

32. (МГУ, экономич. ф-т, 1977) Найти все a , при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(1 + a), \\ (x + y)^2 = 14 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

$$\boxed{\frac{7}{5} = a}$$

33. (МГУ, филологич. ф-т, 1984) Найти все a , при которых система

$$\begin{cases} y \geq x^2 + 2a, \\ x \geq y^2 + 2a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$$\boxed{\frac{8}{1} = a}$$

34. (МГУ, филологич. ф-т, 1992) Найти все a , при которых система

$$\begin{cases} ax^2 + 4ax - y + 7a + 1 = 0, \\ ay^2 - x - 2ay + 4a - 2 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$$\boxed{\frac{9}{2 \wedge 7} \mp '0 = a}$$

35. (МГУ, географич. ф-т, 1997) Найти все a , при которых система

$$\begin{cases} ax^2 - 2ax - 2y + 4a - 2 \leq 0, \\ ay^2 + 4ay - 2x + 7a + 4 \leq 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$$\boxed{\frac{8}{1} = a}$$

36. (МГУ, биологич. ф-т, 1991) Найти все a , при которых система

$$\begin{cases} z \cos(x - y) + (2 + xy) \sin(x + y) - z = 0, \\ x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = a + 2x, \\ (x + y + a \sin^2 z) ((1 - a) \ln(1 - xy) + 1) = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$$\boxed{1 = v}$$

37. (МГУ, химический ф-т, 1986) Найти все a , при которых система

$$\begin{cases} \sqrt{|y + 3|} = 1 - \sqrt{5|x|}, \\ 16a - 9 - 6y = 25x^2 + y^2 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

$$\boxed{\frac{91}{1} + \frac{881}{1} = v}$$

38. (МГУ, биологич. ф-т, 2001) Найти все a , при которых система

$$\begin{cases} \sin x = \cos(x\sqrt{6 - 2a^2}), \\ \cos x = \left(a - \frac{2}{3}\right) \sin(x\sqrt{6 - 2a^2}) \end{cases}$$

имеет на отрезке $[0; 2\pi]$ единственное решение.

$$\boxed{\left\{ \frac{1}{2} \wedge \frac{1}{2} + \frac{1}{1} - \frac{1}{1} - \frac{1}{1} \right\} \ni v}$$

39. (МГУ, мехмат, 1998-07.5) Найти все a , при которых система

$$\begin{cases} \cos^2(\pi xy) - 2 \sin^2(\pi x) - 3 \sin^2(\pi y) - 2 + \operatorname{tg}(\pi a) = 0, \\ \cos(\pi xy) - \frac{3}{2} \sin^2(\pi x) - 2 \sin^2(\pi y) - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{tg}(\pi a) = 0, \\ \log_2 \left(1 + 4 \sin^2 \left(\frac{\pi a}{4} - \frac{\pi}{16} \right) - x^2 - y^2 \right) \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

$$\boxed{\mathbb{Z} \ni u, u + \frac{1}{6} = v}$$

40. (МГУ, экономич. ф-т, 1999) Найти все a , при которых система

$$\begin{cases} a \sin |2z| + \log_5(x\sqrt{2 - 5x^8}) + a^2 = 0, \\ ((y^2 - 1) \cos^2 z - y \sin 2z + 1) \left(1 + \sqrt{\pi + 2z} + \sqrt{\pi - 2z} \right) = 0 \end{cases}$$

имеет не более двух различных решений, но не менее одного. Найти эти решения.

$$\boxed{\text{Если } a = \frac{1}{\sqrt{6-2}}, \text{ то } \log_5 \frac{1}{1} = x \text{ или } \frac{1}{1} = z, \text{ то } \frac{1}{1} = z \text{ или } \frac{1}{1} = x \text{ или } \frac{1}{1} = z \text{ или } \frac{1}{1} = x}$$

$$\boxed{\text{Если } a = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ то } \log_5 \frac{1}{1} = x \text{ или } \frac{1}{1} = z, \text{ то } \frac{1}{1} = z \text{ или } \frac{1}{1} = x}$$

41. (МГУ, химический ф-т, 1988) Найти все значения параметра a , при которых равносильны системы уравнений

$$\begin{cases} x + 2y = 2 - a, \\ -x + ay = a - 2a^2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x^2 - y^4 - 4x + 3 = 0, \\ 2x^2 + y^2 + (a^2 + 2a - 11)x + 12 - 6a = 0. \end{cases}$$

$\boxed{1 - \sqrt{2} = a}$

42. Найдите все значения параметров a и b , при которых система

$$\begin{cases} xyz + z = a, \\ xyz^2 + z = b, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

$\boxed{2 - a = b = a}$

43. (МГУ, мехмат, 2000-03.5) При каких значениях параметра a уравнение

$$\left(\left(\frac{3}{2} \right)^x + \left(\frac{3}{2} \right)^{a-x} - \frac{3}{5} \left(\frac{3}{2} \right)^a - \frac{8}{5} \right) \cdot \left(\left(\frac{3}{2} \right)^{2x-2} + \left(\frac{3}{2} \right)^{2a-2x-3} - 4 \left(\frac{3}{2} \right)^{2a-5} + 2 \right) = 0$$

имеет хотя бы одно решение и каждое его решение является целым числом?

$\boxed{\frac{2}{5}; 1}$