Суммирование

1. (*Всеросс., 2014, I этап, 10–11*) Если число 100^{10} записать в виде суммы десяток $10+10+\ldots$, то сколько получится слагаемых?

$\boxed{10^{19}}$

2. (*ОММО, 2017*) Представьте в виде несократимой дроби:

$$\frac{12+15}{18}+\frac{21+24}{27}+\ldots+\frac{48+51}{54}\,.$$

$\boxed{\frac{71}{20}}$

Основной приём вычисления конечных сумм $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$ — представить каждое слагаемое в виде разности таким образом, чтобы в результате почти всё сократилось.

3. Заметив, что $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$, вычислите

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{2014\cdot 2015}\,.$$

$\boxed{\frac{2014}{2015}}$

4. Упростите выражение $k^2-(k-1)^2$, после чего докажите, что:

а) $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$; б) $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

5. Докажите, что

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots+\frac{n-1}{n!}=1-\frac{1}{n!}\,.$$

6. Докажите, что

$$1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots+n\cdot n!=(n+1)!-1.$$

7. Докажите, что

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{36}+\ldots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=1-\frac{1}{(n+1)^2}\,.$$

8. Докажите, что

$$\frac{5}{1\cdot 2}+\frac{13}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{2n^2+2n+1}{n(n+1)}=\frac{n(2n+3)}{n+1}\,.$$

9. Докажите, что

$$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}\,.$$

10. Упростите выражение $k^3-(k-1)^3$, после чего докажите, что

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,.$$

11. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2013, 7*) На сколько сумма $2^2+4^2+6^2+\ldots+100^2$ больше суммы $1^2+3^2+5^2+\ldots+99^2$?

На 5050

12. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2013, 8*) а) Представьте число 2013 в виде суммы нескольких (более одного) последовательных натуральных чисел.

б) Выясните, какое наибольшее количество слагаемых может содержать такая сумма (при условии, что слагаемые — последовательные натуральные числа).

б) 61

13. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2013, 8–9*) Сравните числа $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{2012}{2013!}$ и 1.

Первое число меньше

14. (*«Ломоносов», 2014, 10–11*) Укажите целое число, ближайшее к числу

$$\sqrt{5000-\sqrt{5001\cdot 4999}}+\sqrt{4998-\sqrt{4999\cdot 4997}}+\ldots+\sqrt{2-\sqrt{3\cdot 1}}\,.$$

49

15. (*«Ломоносов», 2014, 10–11*) Вычислите:

$$\frac{1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+2013\cdot 2014}{(1+2+3+\ldots+2013)\cdot\frac{1}{6}}\,.$$

8060

16. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11*) Вычислите сумму

$$S=\frac{2014}{3\cdot 7}+\frac{2014}{7\cdot 11}+\frac{2014}{11\cdot 15}+\ldots+\frac{2014}{2011\cdot 2015}\,.$$

В ответе укажите остаток от деления на 5 натурального числа, ближайшего к полученному значению S.

3

17. (*«Курчатов», 2017, 11*) Пусть d_1, d_2, …, d_n — это все натуральные делители числа 10!. Найдите сумму

$$\frac{1}{d_1+\sqrt{10!}}+\frac{1}{d_2+\sqrt{10!}}+\ldots+\frac{1}{d_n+\sqrt{10!}}\,.$$

$\frac{3}{16\sqrt{7}}$