Игры и стратегии

Для начала рекомендуется прочесть несколько первых параграфов книги

- А. Х. Шень. Игры и стратегии с точки зрения математики. М.: МЦНМО, 2008.

1. (*Математический праздник, 2014, 7*) На доске записаны два числа: 2014 и 2015. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За один ход можно

— либо уменьшить одно из чисел на его ненулевую цифру или на ненулевую цифру другого числа;

— либо разделить одно из чисел пополам, если оно чётное.

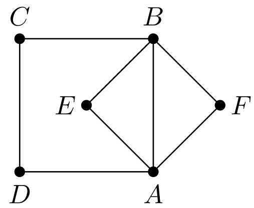
Выигрывает тот, кто первым напишет однозначное число. Кто из них может выиграть, как бы ни играл соперник?

2. (*«Ломоносов», 2017, 5–6.6, 7–8.7, 9.5*) Петя и Вася играют в игру. На доске написано число:

$$112233344455555666677777.$$

За один ход разрешается стереть любое количество одинаковых цифр. Выигрывает тот, кто сотрёт последнюю цифру. Петя ходит первым. Может ли он так ходить, чтобы гарантированно выиграть?

3. (*«Высшая проба», 2014, 7.5, 8.4, 9.3*) Двое играют в такую игру. На рисунке в точке A стоит фишка. Они ходят фишкой по очереди, с каждым ходом передвигая фишку из точки, в которой она стоит, в одну из названных на рисунке точек, соединённую с нею отрезком. Два раза по одному отрезку ходить нельзя. Кто не может сделать ход, проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре обеих сторон? Обоснуйте свой ответ.



4. (*Олимпиада им. Эйлера, РЭ, 2015.5*) На столе лежит палочка длиной 10 см. Петя ломает её на две части и кладёт обе получившиеся палочки на стол. С одной из лежащих на столе палочек Вася проделывает ту же операцию, потом то же делает Петя и т. д. по очереди. Петя хочет, чтобы после 18 разломов все получившиеся палочки были короче 1 см. Вася хочет помешать Пете. Кто из них имеет возможность добиться своей цели независимо от действий соперника?

5. (*Всеросс., 2017, МЭ, 9.5*) Германн и Чекалинский разложили на столе 13 различных карт. Каждая карта может лежать в одном из двух положений: рубашкой вверх или рубашкой вниз. Игроки должны по очереди переворачивать по одной карте. Проигрывает тот игрок, после хода которого повторится какая-то из предыдущих ситуаций (включая изначальную). Первый ход сделал Чекалинский. Кто сможет выиграть независимо от того, как будет играть соперник?

6. (*«Высшая проба», 2016, 9.1*) Дан куб, каждая грань которого — это клетчатое поле размером 2015 на 2015 клеток. В центре одной из граней стоит пешка. Данил и Максим передвигают пешку по клеткам куба. Данил может ходить только на соседнюю по стороне клетку (разрешается переходить на другую грань, если клетки соседние по стороне), а Максим может поставить пешку в любую клетку. Пешка красит за собой клетки. На закрашенную клетку пешку двигать нельзя. Изначальная клетка (центр грани) закрашена. Данил ходит первым. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре обоих?

7. (*Турнир городов, 2016, 8–9*) Из спичек сложен клетчатый квадрат 9×9, сторона каждой клетки — одна спичка. Петя и Вася по очереди убирают по спичке, начинает Петя. Выиграет тот, после чьего хода не останется целых квадратиков 1×1. Кто может действовать так, чтобы обеспечить себе победу, как бы ни играл его соперник?

8. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2012, 7–9*) Петя и Коля играют в такую игру. Петя загадывает натуральное число от 1 до 2012. Коля называет натуральные числа, и после каждого названного числа Петя говорит «недобор», если названное число меньше загаданного, и «перебор», если названное число больше загаданного. Если названное число совпадает с загаданным, то Петя говорит «угадал» и игра заканчивается победой Коли. При этом если в процессе отгадывания дважды возник «перебор», то игра заканчивается победой Пети.

а) Сможет ли Коля гарантированно выиграть, назвав не более 100 чисел?

б) Найдите наименьшее N такое, что Коля гарантированно сможет выиграть, назвав не более N натуральных чисел.

9. (*ММО, 2013, 8.6*) На доске записано целое положительное число N. Два игрока ходят по очереди. За ход разрешается либо заменить число на доске на один из его делителей (отличных от единицы и самого числа), либо уменьшить число на единицу (если при этом число остается положительным). Тот, кто не может сделать ход, проигрывает. При каких N первый игрок может выиграть, как бы ни играл соперник?

10. (*ММО, 2009, 8.6*) Двое играющих по очереди пишут — каждый на своей половине доски — по одному натуральному числу (повторения разрешаются) так, чтобы сумма всех чисел на доске не превосходила 10000. После того, как сумма всех чисел на доске становится равной 10000, игра заканчивается подсчётом суммы всех цифр на каждой половине. Выигрывает тот, на чьей половине сумма цифр меньше (при равных суммах — ничья). Может ли кто-нибудь из игроков выиграть, как бы ни играл противник?

11. (*Всеросс., 2017, РЭ, 9.2, 11.2*) Вася задумал восемь клеток шахматной доски, никакие две из которых не лежат в одной строке или в одном столбце. За ход Петя выставляет на доску восемь ладей, не бьющих друг друга, а затем Вася указывает все ладьи, стоящие на задуманных клетках. Если количество ладей, указанных Васей на этом ходе, чётно (то есть 0, 2, 4, 6 или 8), то Петя выигрывает; иначе все фигуры снимаются с доски и Петя делает следующий ход. За какое наименьшее число ходов Петя сможет гарантированно выиграть?

12. (*Всеросс., 1997, ОЭ, 9.2*) На доске записаны числа 1, 2, 3, ..., 1000. Двое по очереди стирают по одному числу. Игра заканчивается, когда на доске остаются два числа. Если их сумма делится на 3, то побеждает тот, кто делал первый ход, если нет — то его партнер. Кто из них выиграет при правильной игре?

13. (*Всеросс., 2001, ОЭ, 9.2*) Петя и Коля играют в следующую игру: они по очереди изменяют один из коэффициентов a или b квадратного трёхчлена $x^2 + ax + b$: Петя на 1, Коля — на 1 или на 3. Коля выигрывает, если после хода одного из игроков получается трёхчлен, имеющий целые корни. Верно ли, что Коля может выиграть при любых начальных целых коэффициентах a и b независимо от игры Пети?

14. (*Всеросс., 1998, ОЭ, 9.6*) На концах клетчатой полоски размером 1×101 клеток стоят две фишки: слева — фишка первого игрока, справа — второго. За ход разрешается сдвинуть свою фишку в направлении противоположного края полоски на 1, 2, 3 или 4 клетки. При этом разрешается перепрыгивать через фишку соперника, но запрещается ставить свою фишку на одну клетку с ней. Выигрывает тот, кто первым достигнет противоположного края полоски. Кто выиграет при правильной игре: тот, кто ходит первым, или его соперник?

15. (*Всеросс., 2003, ОЭ, 9.4*) Два игрока по очереди выписывают на доске в ряд слева направо произвольные цифры. Проигрывает игрок, после хода которого одна или несколько цифр, записанных подряд, образуют число, кратное 11. Кто из игроков победит при правильной игре?

16. (*Всеросс., 2007, финал, 9.3*) Два игрока по очереди проводят диагонали в правильном $(2n+1)$-угольнике $(n > 1)$. Разрешается проводить диагональ, если она пересекается (по внутренним точкам) с чётным числом ранее проведённых диагоналей (и не была проведена раньше). Проигрывает игрок, который не может сделать очередной ход. Кто выиграет при правильной игре?

17. (*Всеросс., 2014, РЭ, 10.5*) На доске написано уравнение $x^3 + *x^2 + *x + * = 0$. Петя и Вася по очереди заменяют звёздочки на рациональные числа: вначале Петя заменяет любую из звёздочек, потом Вася — любую из двух оставшихся, а затем Петя — оставшуюся звёздочку. Верно ли, что при любых действиях Васи Петя сможет получить уравнение, у которого разность каких-то двух корней равна 2014?

18. (*«Высшая проба», 2013, 9.6, 10.6*) Двое играют в следующую игру. У них есть плитка шоколада, разделённая бороздками, параллельными сторонам плитки, на дольки. Борозки разбивают плитку на M вертикальных и N горизонтальных полосок. Первый игрок своим ходом ломает плитку вдоль одной из бороздок на две прямоугольные части и отдаёт их второму. Второй игрок выбирает одну из частей, съедает её, а другую ломает по бороздке и отдаёт получившиеся две части первому. Первый игрок съедает одну из полученных частей, а другую ломает и отдаёт, и всё повторяется. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. При каких M и N первый игрок может играть так, чтобы выиграть вне зависимости от действий второго игрока?

19. (*Всеросс., 2018, МЭ, 10.6*) Есть две коробки, в одной 2017 конфет, а в другой 2018. Играют двое, ходят по очереди. За один ход каждый может съесть любое количество конфет, отличное от нуля, из любой коробки. Правила игры не допускают, чтобы после какого-то хода число конфет в одной из коробок делилось на число конфет в другой. Проигрывает тот, кто не может сделать ход, не нарушив этого условия. Кто сможет выиграть: начинающий игру или второй игрок, как бы ни играл его соперник?

20. (*ММО, 2014, 10.5*) Дан треугольник, у которого нет равных углов. Петя и Вася играют в такую игру: за один ход Петя отмечает точку на плоскости, а Вася красит ее по своему выбору в красный или синий цвет. Петя выиграет, если какие-то три из отмеченных им и покрашенных Васей точек образуют одноцветный треугольник, подобный исходному. За какое наименьшее число ходов Петя сможет гарантированно выиграть (каков бы ни был исходный треугольник)?

21. (*Всеросс., 2017, РЭ, 10.3*) Паша выбрал 2017 (не обязательно различных) натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2017}$ и играет сам с собой в следующую игру. Изначально у него есть неограниченный запас камней и 2017 больших пустых коробок. За один ход Паша добавляет в любую коробку (по своему выбору) a_1 камней, в любую из оставшихся коробок (по своему выбору) — a_2 камней, …, наконец, в оставшуюся коробку — a_{2017} камней. Пашина цель — добиться того, чтобы после некоторого хода во всех коробках стало поровну камней. Мог ли он выбрать числа так, чтобы цели можно было добиться за 43 хода, но нельзя — за меньшее ненулевое число ходов?

22. (*Турнир городов, 2015, 10–11*) В некотором государстве ценятся золотой и платиновый песок. Золото можно менять на платину, а платину на золото по курсу, который определяется натуральными числами g и p так: x граммов золотого песка равноценны y граммам платинового, если $xp = yg$ (числа x и y могут быть нецелыми). Сейчас у банкира есть по килограмму золотого и платинового песка, а $g = p = 1001$. Государство обещает каждый день уменьшать одно из чисел g и p на единицу, так что через 2000 дней они оба станут единицами; но последовательность уменьшений неизвестна. Может ли банкир каждый день менять песок так, чтобы в конце гарантированно получить хотя бы по 2 кг каждого песка?

23. (*Турнир городов, 2017, 10–11*) Петя и Вася играют в такую игру. Сначала Петя задумывает некоторый многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами. Далее делается несколько ходов. За ход Вася платит Пете рубль и называет любое целое число a по своему выбору, которое он ещё не называл, а Петя в ответ говорит, сколько решений в целых числах имеет уравнение $P(x) = a$. Вася выигрывает, как только Петя два раза (не обязательно подряд) назвал одно и то же число. Какого наименьшего числа рублей хватит Васе, чтобы гарантированно выиграть?

24. (*Всеросс., 2017, финал, 10.3*) Изначально на столе лежат три кучки из 100, 101 и 102 камней соответственно. Илья и Костя играют в следующую игру. За один ход каждый из них может взять себе один камень из любой кучи, кроме той, из которой он брал камень на своем предыдущем ходе (на своём первом ходе каждый игрок может брать камень из любой кучки). Ходы игроки делают по очереди, начинает Илья. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может выиграть, как бы ни играл соперник?

25. (*Всеросс., 2016, финал, 10.4*) Внутри выпуклого 100-угольника выбрана точка X, не лежащая ни на одной его стороне или диагонали. Исходно вершины многоугольника не отмечены. Петя и Вася по очереди отмечают ещё не отмеченные вершины 100-угольника, причём Петя начинает и первым ходом отмечает сразу две вершины, а далее каждый своим очередным ходом отмечает по одной вершине. Проигрывает тот, после чьего хода точка X будет лежать внутри многоугольника с отмеченными вершинами. Докажите, что Петя может выиграть, как бы ни ходил Вася.

26. (*Всеросс., 2014, финал, 11.2*) Петя и Вася играют в игру на клетчатой доске $n \times n$. Изначально вся доска белая, за исключением угловой клетки — она чёрная, и в ней стоит ладья. Игроки ходят по очереди. Каждым ходом игрок передвигает ладью по горизонтали или вертикали, при этом все клетки, через которые ладья перемещается (включая ту, в которую она попадает), перекрашиваются в чёрный цвет. Ладья не должна передвигаться через чёрные клетки или останавливаться на них. Проигрывает тот, кто не может сделать ход; первым ходит Петя. Кто выиграет при правильной игре?

27. (*Всеросс., 2014, финал, 11.8*) Двое игроков играют в карточную игру. У них есть колода из n попарно различных карт. Про любые две карты из колоды известно, какая из них бьёт другую (при этом, если A бьёт B, а B бьёт C, то может оказаться, что C бьёт A). Колода распределена между игроками произвольным образом. На каждом ходу игроки открывают по верхней карте из своих колод, и тот, чья карта бьёт карту другого игрока, берёт обе карты и кладёт их в самый низ своей колоды в произвольном порядке по своему усмотрению. Докажите, что при любой исходной раздаче игроки могут, зная расположение карт, договориться и действовать так, чтобы один из игроков остался без карт.