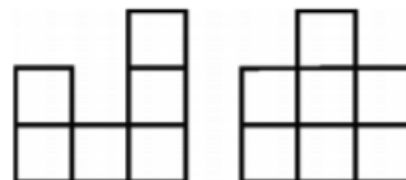


Стереометрия на олимпиаде «Покори Воробьёвы горы!»

1. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 9) Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Назовем точку *эквидистантной*, если найдутся две вершины куба, для которых эта точка является серединой отрезка. Сколько эквидистантных точек в кубе?

61

2. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 9) На уроке рисования учитель сложил из нескольких одинаковых кубиков фигуру, а Петров и Васечкин нарисовали её с двух различных точек зрения (см. рисунок). Из скольких кубиков могла состоять эта фигура? (В ответе укажите произведение наибольшего и наименьшего возможного значения.)



128

3. («Покори Воробьёвы горы!», 2017) В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ сторона основания равна $\frac{2}{\sqrt{3}}$, а боковая сторона $AA_1 = 2$.

- Докажите, что в призму можно вписать шар, и найдите его радиус.
- Найдите объём наименьшей части шара, которую отсекает плоскость, проходящая через точки B , A_1 и E .

$$\frac{10\sqrt{5}-14}{4\sqrt{5}-10} \quad (9)$$

4. («Покори Воробьёвы горы!», 2017) В треугольной пирамиде длины перпендикуляров, опущенных из четырёх вершин на противоположные грани, равны 3, 4, 7 и $84/37$ соответственно. Найдите радиус вписанного в эту пирамиду шара.

 $\frac{7}{9}$

5. («Покори Воробьёвы горы!», 2016) На плоскости основания конуса с высотой, равной радиусу основания, дана точка (вне конуса), удалённая от окружности основания на расстояние, равное двум радиусам основания. Найдите угол между касательными плоскостями к боковой поверхности конуса, проходящими через данную точку.

$$2 \arctg \frac{2}{\sqrt{5}}$$

6. («Покори Воробьёвы горы!», 2016) Двугранный угол при основании правильной треугольной пирамиды $SABC$ равен $\arctg 3$. В каком отношении делит боковую сторону SB сфера, центр которой лежит в плоскости основания, если известно, что вершины основания принадлежат сфере?

8 : 5

15. («Покори Воробьёвы горы!», 2013) Гора имеет форму правильной четырёхугольной пирамиды с основанием $ABCD$ и вершиной S , причём длина ребра основания равна 13 км, а боковые грани наклонены к основанию под углом β ($\cos \beta = 0,6$). Скорость туриста на ровной поверхности составляет 4 км/ч, а при подъёме или спуске под углом α к горизонту равна $4 \cos^2 \alpha$ км/ч. Может ли турист, находящийся в точке A , успеть на автобус, отходящий ровно через 6 часов 15 минут из точки C , если в середине пути он обязательно делает 9-минутную остановку?

Может

16. («Покори Воробьёвы горы!», 2012) Радиус сферы, вписанной в правильную треугольную пирамиду, равен R . Найдите величину двугранного угла при боковом ребре этой пирамиды, при которой максимален объём другой пирамиды, вершинами которой служат центр вписанной в исходную пирамиду сферы и точки касания этой сферы с боковыми гранями исходной пирамиды.

06

17. («Покори Воробьёвы горы!», 2012) В желобе, имеющем форму двугранного угла величины $2 \arcsin \frac{1}{3}$, неподвижно лежит шар радиуса 3, касаясь при этом обеих граней. Другой шар скользит вдоль желоба, также постоянно касаясь каждой из граней, и проскальзывает мимо неподвижно лежащего шара, не сталкиваясь с ним и даже не касаясь его. Найдите все возможные значения радиуса скользящего шара.

$(\infty + ; 9) \cap (\frac{2}{3}; 0)$

18. («Покори Воробьёвы горы!», 2011) В сферу радиуса $\sqrt{3}$ вписан параллелепипед, объём которого равен 8. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

24

19. («Покори Воробьёвы горы!», 2011) Рассматриваются плоские сечения правильной пирамиды $SABCD$, параллельные боковому ребру SB и диагонали основания AC , в которые можно вписать окружность. Какие значения может принимать радиус этих окружностей, если $AC = 1$, $\cos \angle SBD = \frac{2}{3}$?

$\{\frac{2}{3}\} \cap [\frac{9}{17}; 0)$

20. («Покори Воробьёвы горы!», 2010) Через точки M, N, K, L , лежащие соответственно на рёбрах SA, SB, SC, SD правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ (S — вершина), проведена плоскость. Известно, что $MK \perp NL$, $SN = 3 \cdot SL$ и площадь треугольника SMK равна 12. Найдите площадь треугольника SLN .

91

21. («Покори Воробьёвы горы!», 2010) В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S и основанием $ABCD$ длины всех рёбер равны 1. Некоторая плоскость пересекает отрезки SA, SB, SC, SD в точках K, L, M, N соответственно. Какие значения может принимать площадь треугольника SLN , если $SK = \frac{1}{2}$ и $SM = \frac{1}{3}$?

$[\frac{8}{1}; \frac{22}{3}]$