Стереометрия на ОММО

Задачи по стереометрии на ОММО требуют, как правило, хорошего пространственного воображения. Вычисления в них обычно минимальны.

1. (*ОММО, 2018*) Точки M, N и K расположены на боковых рёбрах AA_1, BB_1 и CC_1 треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ так, что $AM : AA_1 = 1 : 2$, $BN : BB_1 = 1 : 3$, $CK : CC_1 = 1 : 4$. Точка P принадлежит призме. Найдите наибольшее возможное значение объёма пирамиды $MNKP$, если объём призмы равен 16.

$\boxed{4}$

2. (*ОММО, 2017*) В треугольной пирамиде $ABCD$ с основанием ABC боковые рёбра попарно перпендикулярны, $DA = DB = 2$, $DC = 5$. Из точки основания испускают луч света. Отразившись ровно по одному разу от каждой боковой грани (от рёбер луч не отражается), луч попадает в точку на основании пирамиды. Какое наименьшее расстояние мог пройти луч?

$\boxed{\frac{10\sqrt{6}}{9}}$

3. (*ОММО, 2016, 11*) Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна a, а высота — $a/2$. Найдите объём тела, ограниченного поверхностью этой пирамиды и сферами радиуса $a/3$ с центрами в вершинах основания этой пирамиды.

$\boxed{\frac{81-4\pi}{486}a^3}$

4. (*ОММО, 2015, 11*) В конус вписан цилиндр объёма 21. Плоскость верхнего основания этого цилиндра отсекает от исходного конуса усеченный конус объёмом 91. Найдите объём исходного конуса.

$\boxed{94{,}5}$

5. (*ОММО, 2014*) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с рёбрами $AB = 3$, $AD = 4$ и $AA_1 = 5$ проведены два сечения — плоскостью, проходящей через диагональ A_1C, и плоскостью, проходящей через диагональ B_1D. Найдите наибольшее возможное значение суммы площадей поверхностей многогранников, на которые эти сечения разбивают данный параллелепипед.

$\boxed{194}$

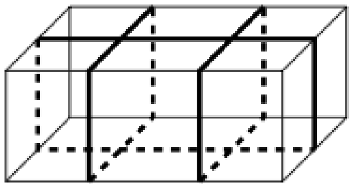
6. (*ОММО, 2013*) Коробка конфет имеет форму правильной шестиугольной призмы со стороной основания 10 и высотой $5\sqrt{3}$. Из двух разных вершин коробки $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ одновременно с одной и той же скоростью начинают двигаться две мухи, меняя направление движения только в вершинах. Одна муха начинает движение в вершине A и двигается только по рёбрам призмы, другая — только по диагоналям оснований и боковых граней. Через некоторое время мухи встречаются. В каких вершинах коробки может произойти встреча?

$\boxed{A,\ C,\ E}$

7. (*ОММО, 2013*) Единичный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ повёрнут на 90° вокруг прямой, проходящей через середины противоположных рёбер AD и B_1C_1. Найдите объём общей части исходного куба и повёрнутого.

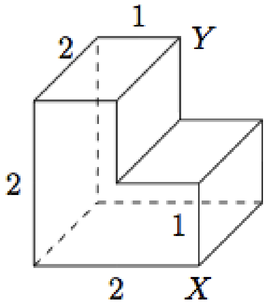
$\boxed{\sqrt{2}-\frac{2}{3}}$

8. (*ОММО, 2012*) Посылка должна быть упакована в ящик в форме прямоугольного параллелепипеда и перевязана один раз вдоль и два раза поперёк (см. рисунок). Можно ли отправить посылку объёма 63 дм^3, имея 4,32 м веревки (толщиной стенок ящика и уходящей на узлы веревкой пренебречь)?



Нет

9. (*ОММО, 2011*) На рисунке изображён многогранник, все двугранные углы которого прямые. Саша утверждает, что кратчайший путь по поверхности этого многогранника от вершины X до вершины Y имеет длину 4. Прав ли он?



Нет

10. (*ОММО, 2010*) Один фермер сварил сыр в виде неправильной пятиугольной призмы, а другой — в виде правильной четырехугольной пирамиды, высота которой в 2 раза меньше стороны основания. Ночью мыши отъели от всех вершин этих многогранников все частицы сыра, которые находились на расстоянии не большем 1 см от соответствующей вершины. У съеденных кусков сыра не было общих частиц. Какой из фермеров понес больший ущерб и во сколько раз?

Ущерб первого в 4,5 раза больше

11. (*ОММО, 2009*) Тетраэдр с ребром 1 повернули на 90° относительно прямой, соединяющей середины противоположных рёбер. Найдите объём общей части нового и исходного тетраэдров.

$\frac{\sqrt{2}}{24}$