Стереометрия на олимпиаде «Ломоносов»

1. (*«Ломоносов», 2017*) В прямой круговой конус, радиус основания которого равен 2, вписан шар. Найдите объём этого шара, если он в три раза меньше объёма конуса.

$\boxed{\frac{16\pi}{9}\sqrt{9\pm5\sqrt{3}}}$

2. (*«Ломоносов», 2016*) Найдите наибольшее значение объёма треугольной пирамиды, у которой противоположные рёбра попарно равны, а сумма длин всех рёбер равна $36\sqrt{2}$.

$\boxed{72}$

3. (*«Ломоносов», 2015*) Отрезок $AB = 8$ пересекает плоскость α под углом 30° и делится этой плоскостью в отношении $1:3$. Найдите радиус сферы, проходящей через точки A и B и пересекающей плоскость α по окружности наименьшего радиуса.

$\boxed{2\sqrt{7}}$

4. (*«Ломоносов», 2015*) Каков минимальный объём пирамиды, у которой в основании лежит правильный треугольник со стороной 6, а все плоские углы при вершине равны между собой и не превосходят $2\arcsin\frac{1}{3}$?

$\boxed{5\sqrt{23}}$

5. (*«Ломоносов», 2014*) В правильную треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ вписан шар радиуса $\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности вписанного в шар прямого кругового цилиндра, основание которого лежит в плоскости, проходящей через точку A и середины рёбер BB_1 и CC_1.

$\boxed{\frac{12\pi}{5}}$

6. (*«Ломоносов», 2013*) В пирамиде $FABC$ $AB = BC$, $FB = FK$, где K — середина отрезка AC, а тангенс угла между плоскостями FAB и ABC относится к тангенсу угла между плоскостями FBC и ABC как $1:3$. Плоскость π параллельна AB, делит ребро FC в отношении $1:4$, считая от вершины F, и проходит через основание O высоты FO пирамиды $FABC$. Найти отношение объёмов многогранников, на которые эта плоскость делит пирамиду $FABC$.

$\boxed{5:11 \text{ или } 1:19}$

7. (*«Ломоносов», 2012*) По деревянному бруску (прямоугольному параллелепипеду) высотой 25 и площадью основания 60 делаются последовательно два плоских параллельных наклонных среза: второй — на 2 ниже первого. После первого среза, наивысшая и наинизшая точки которого находятся на высоте 15 и 10, остаётся нижняя часть бруска, которую перед вторым срезом можно повернуть на любой угол вокруг вертикальной оси, проходящей через центр симметрии основания бруска. Каков наименьший возможный объём верхнего кусочка, отсекаемого от этой части вторым срезом?

$\boxed{120}$

8. (*«Ломоносов», 2011*) Из шара какого наименьшего радиуса можно вырезать правильную четырёхугольную пирамиду с ребром основания 14 и апофемой 12?

$\boxed{7\sqrt{2}}$

9. (*«Ломоносов», 2010*) На ребре AS треугольной пирамиды $SABC$ отмечены такие точки M и N, что $AM = MN = NS$. Найдите площадь треугольника NBC, если площади треугольников ABC, MBC и SBC равны 2, 1 и $2\sqrt{7}$ соответственно.

$\boxed{3}$

10. (*«Ломоносов», 2009*) Можно ли данный двугранный угол величиной 90° пересечь плоскостью так, чтобы в полученном сечении образовался угол величиной 110°?

$\boxed{\text{Да}}$

11. (*«Ломоносов», 2008*) Основанием прямой призмы $ABCA'B'C'$ служит прямоугольный треугольник с катетами $AB = 6$ и $AC = 5$. Через середину бокового ребра $CC' = 4$ параллельно AB проведена прямая l. Какие значения может принимать площадь параллелограмма, у которого две вершины — точки A и C, а остальные вершины лежат на прямых $A'B$ и l соответственно?

$\boxed{5\sqrt{13} \text{ или } 5\sqrt{85}}$

12. (*«Ломоносов», 2007*) Грани двугранного угла пересекают боковую поверхность цилиндра радиуса 3, образуя с его осью углы 50° и 70°, а ребро двугранного угла перпендикулярно этой оси и удалено от неё на расстояние 7. Найдите объём части цилиндра, расположенной внутри двугранного угла.

$\boxed{63\pi\,(\operatorname{tg} 40^\circ \pm \operatorname{tg} 20^\circ)}$

13. (*«Ломоносов», 2006*) В треугольной пирамиде $SABC$ ребро SA перпендикулярно плоскости ABC, $\angle SCB = 90^\circ$, $BC = \sqrt{5}$, $AC = \sqrt{7}$. Последовательность точек O_n строится следующим образом: точка O_1 — центр сферы, описанной около пирамиды $SABC$, и для каждого натурального $n \geqslant 2$ точка O_n есть центр сферы, описанной около пирамиды $O_{n-1}ABC$. Какую длину должно иметь ребро SA, чтобы множество $\{O_n\}$ состояло ровно из двух различных точек?

$\boxed{2}$

14. (*«Ломоносов», 2005*) Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами 9, 12 и 15, а её высота образует с высотами боковых граней (опущенными из той же вершины) одинаковые углы, не меньшие 60°. Какой наибольший объём может иметь такая пирамида?

$\boxed{108\sqrt{3}}$