

Стереометрия на олимпиаде «Физтех»

1. («Физтех», 2018, 11) Ребро A_1A параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ перпендикулярно его грани $ABCD$. Сфера Ω касается рёбер $BB_1, B_1C_1, C_1C, CB, CD$, и при этом касается ребра CD в такой точке K , что $CK = 4, KD = 1$.

а) Найдите длину ребра A_1A .

б) Пусть дополнительно известно, что сфера Ω касается ребра A_1D_1 . Найдите объём параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и радиус сферы Ω .

$$A_1A = 2\sqrt{5}, R = \frac{1}{8}, V = 2\sqrt{5}$$

2. («Физтех», 2018, 11) На ребре BC параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ выбрана точка M . Сфера, построенная на отрезке C_1M как на диаметре, касается плоскостей четырёх граней параллелепипеда, причём одной из них в точке, лежащей на ребре B_1B . Известно, что $BM = 1, CM = 8$. Найдите длину ребра AA_1 , радиус сферы и объём параллелепипеда.

$$AA_1 = 16, R = 10, V = 160$$

3. («Физтех», 2017) Основание треугольной пирамиды $ABCD$ — правильный треугольник ABC . Объём пирамиды равен $\frac{25}{\sqrt{3}}$, а её высота, проведённая из вершины D , равна 3. Точка M — середина ребра CD . Известно, что радиусы сфер, вписанных в пирамиды $ABCM$ и $ABDM$, равны между собой.

а) Найдите все возможные значения угла между гранями пирамиды при ребре AB .

б) Найдите все возможные значения длины ребра CD , если дополнительно известно, что грани BCD и ABC взаимно перпендикулярны.

$$a) \cos \alpha = \frac{1}{3} \text{ или } \frac{2}{3}, b) \frac{2}{3} \sqrt{3} \text{ или } \frac{4}{3}$$

4. («Физтех», 2017) Рассматриваются четырёхугольные пирамиды $MABCD$ со следующими свойствами: основание пирамиды — выпуклый четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = 1, CD = DA = 2$, а каждая из плоскостей боковых граней MAB, MBC, MCD, MDA составляет угол 45° с плоскостью основания.

а) Найдите объём такой пирамиды, если её высота, опущенная из вершины M , равна $\frac{9}{5}$.

б) При какой длине высоты объём рассматриваемых пирамид максимален и чему равен этот объём?

$$a) \frac{27}{4}, b) \frac{3}{4}$$

5. («Физтех», 2016) Дана правильная призма $KLMN K_1 L_1 M_1 N_1$ с основанием $KLMN$. Плоскости α и β перпендикулярны L_1N и проходят через вершины K и N_1 соответственно. Пусть A и B соответственно — точки пересечения плоскостей α и β с диагональю L_1N , при этом $AN < BN$.

а) Найдите отношение $L_1B : AN$.

б) Пусть дополнительно известно, что сфера радиуса $1/2$ касается всех боковых граней призмы, а также плоскостей α и β . Найдите отрезок L_1N и объём призмы $KLMN K_1 L_1 M_1 N_1$.

$$a) \frac{2}{3}, b) \frac{2\sqrt{2}}{3}, V = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

6. («Физтех», 2016) Дана прямая треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Сфера с диаметром AC пересекает рёбра AB и BC соответственно в точках F и N , отличных от вершин призмы. Отрезки C_1F и A_1N пересекаются в точке P , и при этом $A_1N = 7$, $C_1P = 6$.

- Найдите угол PFA .
- Найдите отношение $AF : FB$.
- Пусть дополнительно известно, что $AB = 6$. Найдите объём призмы.

$$\frac{1}{12} \sqrt{12} (\pi; 1; 5; 9; 06) (\text{в})$$

7. («Физтех», 2016) Высота правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 12. Сфера Ω радиуса $\sqrt{35/3}$ касается всех боковых граней призмы. На отрезках AA_1 и BB_1 выбраны соответственно точки K и L такие, что $KL \parallel AB$, а плоскости KBC и LA_1C_1 касаются сферы Ω . Найдите объём призмы и длину отрезка AK .

$$V = \frac{1}{3} \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 12 = 6 \sqrt{3}$$

8. («Физтех», 2015) На ребре BB_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ взята точка T такая, что $BT : B_1T = 2 : 5$. Точка T является вершиной прямого кругового конуса, такого, что три вершины призмы принадлежат окружности его основания.

- Найдите отношение высоты призмы к ребру её основания
- Пусть дополнительно известно, что $CC_1 = 7$. Найдите объём конуса.

$$\frac{1}{3} \pi \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^2 \cdot \frac{7}{2} = \frac{343}{24} \pi$$

9. («Физтех», 2015) На ребре SA правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S отмечена точка K такая, что $AK : KS = 1 : 4$. Точка K является вершиной прямого кругового конуса, на окружности основания которого лежат три вершины пирамиды $SABCD$.

- Найдите отношение $DS : BC$.
- Пусть дополнительно известно, что высота пирамиды $SABCD$ равна 5. Найдите объём конуса.

$$\frac{1}{3} \pi \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 \cdot \frac{5}{2} = \frac{125}{24} \pi$$

10. («Физтех», 2015) В основании четырёхугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ находится ромб $ABCD$, в котором $CD = 3$ и $\angle ABD = 30^\circ$. Сфера проходит через вершины D, C, B, B_1, A_1, D_1 .

- Найдите площадь круга, полученного в сечении сферы плоскостью, проходящей через точки A, C и D .
- Найдите угол C_1AB .
- Пусть дополнительно известно, что радиус сферы равен 6. Найдите объём призмы.

$$18 (\pi; 9; 06) (\text{в})$$

11. («Физтех», 2014) Даны пирамида $ABCD$ и сфера. Ребро AC пирамиды является диаметром сферы; прямые, содержащие три других ребра, касаются сферы, а середины двух оставшихся рёбер лежат на сфере. Найдите угол ABC , длину ребра BD и объём пирамиды $ABCD$, если $AC = 6$.

$$45^\circ, 12, 18\sqrt{3}$$

12. («Физтех», 2014) В треугольной пирамиде $SABC$ из вершины S опустили высоту SH . Известно, что $AB > BC$, $AB > AC$. Сфера, построенная на отрезке SH как на диаметре, проходит через середины четырёх рёбер пирамиды, и её радиус равен 3.

а) Найдите длину ребра AB и угол ACB .

б) Пусть дополнительно известно, что прямая, проходящая через вершину C и середину ребра SA , касается сферы. Найдите объём пирамиды $SABC$.

$$\frac{1}{2} \sqrt{98}, 06; 21$$

13. («Физтех», 2013) В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой $BC = 4$. Сфера ω касается плоскости основания пирамиды и касается всех трёх её боковых рёбер в их серединах. Пусть Ω — сфера, описанная около пирамиды $SABC$.

а) Найдите расстояние между центрами сфер ω и Ω .

б) Найдите отношение радиусов сфер ω и Ω .

в) Пусть дополнительно известно, что угол между гранями SAB и ABC равен $\arctg 2$. Найдите объём пирамиды $SABC$.

$$\frac{1}{4} (a); 2; 1; (b); 4$$

14. («Физтех», 2013) Правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ вписана в цилиндр (основания призмы вписаны в окружности оснований цилиндра). Плоскость α имеет ровно одну общую точку с каждым из оснований цилиндра и пересекает рёбра AA_1 , BB_1 и CC_1 в точках K , N , P соответственно. Найдите отношения $CP : PC_1$ и $BN : NB_1$, если $AK : KA_1 = 1 : 12$.

$$CP : PC_1 = 25 : 27, BN : NB_1 = 49 : 3, BN : NB_1 = 49 : 3 \text{ или } CP : PC_1 = 25 : 27$$

15. («Физтех», 2012) На ребре BB_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ выбрана точка Q так, что центр сферы, описанной около пирамиды QAA_1C_1C , лежит в грани AA_1C_1C . Известно, что радиус сферы, описанной около пирамиды $QABC$, равен 2, а ребро основания призмы равно $\sqrt{3}$. Найдите:

а) отношение объёма пирамиды QAA_1C_1C к объёму призмы;

б) длину отрезка QB ;

в) объём призмы.

$$\frac{91}{18} (a); 2\sqrt{3}; (b); 3; 7 (a)$$

16. («Физтех», 2012) Рассматриваются всевозможные правильные шестиугольные пирамиды, боковые рёбра которых равны a .

а) Найдите наибольший возможный объём рассматриваемых пирамид.

б) Для пирамиды наибольшего объёма найдите угол между соседними боковыми гранями.

$$\left(\frac{5}{4}\right) \arccos \left(\frac{5}{8}\right) (a)$$

17. («Физтех», 2011) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания ABC равна 2, боковое ребро равно 3. Сфера с центром O на прямой SB касается рёбер SA , SC и AC . Найдите расстояния от центра сферы до плоскостей ASC и ABC , а также радиус сферы.

$$\frac{1}{3} \sqrt{\frac{23}{8}}; \frac{1}{2} \sqrt{\frac{23}{8}}; \frac{1}{2} \sqrt{\frac{23}{8}}$$

18. («Физтех», 2011) В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $ABCD$ равна 2, боковое ребро равно 5. Сфера с центром O на плоскости ABS касается рёбер SC , SD и CD . Найдите расстояния от центра сферы до плоскостей ABC и BCS , а также радиус сферы.

$$\frac{11}{62\sqrt{4}}; \frac{9}{22} \wedge \frac{11}{8}; \frac{11}{22\sqrt{2}}$$

19. («Физтех», 2010) Основанием треугольной пирамиды $SABC$ является правильный треугольник ABC со стороной 5. Боковое ребро SC перпендикулярно основанию и имеет длину 12. Сфера, центр O которой лежит в плоскости SBC , касается рёбер SA , AB и AC в точках A_1 , B_1 и C_1 соответственно. Найдите AA_1 , расстояние от точки O до ребра BC и радиус сферы.

$$\frac{7}{2\sqrt{5}}; \frac{7}{5}; \frac{7}{5\sqrt{1}}$$

20. («Физтех», 2010) В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $ABCD$ равна $\sqrt{2}$, угол между боковым ребром и плоскостью основания равен $\arctg 2$. Точка K лежит на высоте SO , причём $KO : SO = 3 : 4$. Через точку K проведена плоскость Π , перпендикулярная прямой SC . Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью Π , расстояние от точки B до плоскости Π и угол между плоскостью Π и прямой SB .

$$\frac{5}{4} \text{ cmcme}; \frac{5}{3} \wedge; \frac{5\sqrt{5}}{1}$$

21. («Физтех», 2009) В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит трапеция $ABCD$, в которой $AB = BC = CD = 2$, $AD = 4$. Точки K , L , M лежат на отрезках $A_1 B$, $B_1 C$, $C_1 D$ соответственно так, что

$$\frac{A_1 K}{KB} = \frac{B_1 L}{LC} = \frac{C_1 M}{MD} = 4.$$

Сфера радиуса $R = 2$ касается прямых $A_1 B$, $B_1 C$, $C_1 D$ в точках K , L , M соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника KLM , расстояние от центра сферы до плоскости KLM и объём призмы.

$$5\sqrt{5}; \frac{5}{4}; \frac{5}{12\sqrt{2}}$$

22. («Физтех», 2009) На ребре AB треугольной пирамиды $ABCD$ выбрана точка X такая, что $AX : XB = 4$. Точки K и L — проекции точки X на плоскости ACD и BCD соответственно. Известно, что $KC = 3$, $KD = 7$, $KA = 13$, $LC = 9$, $LB = \frac{7}{2}$. Найдите длину отрезка LD , высоту пирамиды, опущенную из вершины A , и угол между ребром AB и плоскостью BCD .

$$\frac{19}{21} \wedge \text{cmcme}; 5\sqrt{5}; 11$$

23. («Физтех», 2008) В основании пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Сфера ω радиуса $\frac{77}{20}$ с центром O касается рёбер AS , BS , AD , BC пирамиды $SABCD$ соответственно в точках K , L , M , N , пересекает ребро AB в точках P и Q и касается грани CDS . Известно, что прямая SO перпендикулярна плоскости $ABCD$ и пересекает её в точке H , $\frac{PQ}{AB} = \sqrt{\frac{23}{72}}$, $\frac{AK}{BS} = \frac{1}{3}$. Найдите углы SAB и BSH , высоту пирамиды и её объём.

$$\frac{5}{2\sqrt{625}}; 8; \frac{12}{11} \text{ cmcme}; \frac{37}{2\sqrt{2}} \text{ cmcme}$$

24. (МФТИ, 2008) В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$, причём $AB = 3$, $SC = 8$. Пусть N — середина SB , M — середина SC , причём $BN = MC = 4MN$. Каким может быть минимальный радиус сферы, описанной около пирамиды $SABCD$? Найдите объём пирамиды $SABCD$, вписанной в эту сферу (минимального радиуса).

$$\frac{32}{1206451} \wedge; \frac{59}{31}$$

25. (МФТИ, 2008) Грани ABC и ABD пирамиды $ABCD$ ортогональны и являются равными равнобедренными треугольниками с общим основанием AB . Известно, что $AB = 3$, $CD = 2$. Найдите угол между прямыми AC и BD , расстояние между прямыми AC и BD и радиус сферы, описанной вокруг пирамиды $ABCD$.

$$\frac{8}{9\sqrt{13}}; \frac{8\sqrt{13}}{9}; \frac{\sqrt{13}}{6} \text{ см}$$

26. («Физтех», 2007) Внутри прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ расположены два шара ω_1 и ω_2 , касающиеся друг друга внешним образом; кроме того, шар ω_1 касается граней $ABCD$, $CDD_1 C_1$, $BCC_1 B_1$, а шар ω_2 касается граней $A_1 B_1 C_1 D_1$, $ADD_1 A_1$, $ABB_1 A_1$. Известно, что $C_1 D_1 = 20 - \sqrt{11}$, $AD = 20$, $BB_1 = 20 + \sqrt{11}$. Найти расстояние между центрами шаров ω_1 и ω_2 . Найти наибольший и наименьший суммарный объём шаров.

$$\frac{8}{\sqrt{1612}} = \text{мин} \text{ и } \left(\sqrt{11} \wedge 281 - \frac{8}{\sqrt{1612}} \right) = \text{макс} \text{ и } 81 = p$$