Симедиана

Пусть дан треугольник ABC и CM — его медиана. Пусть S — такая точка на стороне AB, что луч CS симметричен лучу CM относительно биссектрисы угла C. Тогда отрезок CS называется *симедианой* треугольника ABC.

Во избежание постоянных оговорок удобно называть симедианой и медианой также лучи (или прямые) CS и CM. Тогда можно просто говорить, что симедиана симметрична медиане относительно биссектрисы.

Задача 1. Докажите, что симедиана CS делит сторону на отрезки, которые относятся как квадраты прилежащих сторон:

$$\frac{AS}{BS} = \frac{AC^2}{BC^2}\,.$$

Задача 2. Докажите, что три симедианы треугольника пересекаются в одной точке (*точка Лемуана*).

Задача 3. Пусть a, b, c — длины сторон треугольника. Докажите, что длина симедианы, проведённой к стороне c, выражается формулой

$$s = \frac{ab}{a^2+b^2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}\,.$$

Задача 4. Докажите, что в неравнобедренном треугольнике симедиана совпадает с высотой в том и только в том случае, если это треугольник прямоугольный.

Задача 5. На прямых CA и CB взяты соответственно точки B' и A' так, что $\angle CA'B' = \angle CAB$ (отрезки AB и $A'B'$ в этом случае называются *антипараллельными*). Докажите, что симедиана CS треугольника ABC делит отрезок $A'B'$ пополам.

Задача 6. Сторона AC треугольника ABC является хордой окружности, касающейся прямой BC в точке C. Вторая окружность проходит через точки B, C и касается прямой AC в точке C. Пусть $D \neq C$ — точка пересечения этих окружностей. Докажите, что CD — симедиана треугольника ABC.

Задача 7. (*ММО, 2008, 10.5*) Высоты AA' и CC' остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Точка B_0 — середина стороны AC. Докажите, что точка пересечения прямых, симметричных BB_0 и HB_0 относительно биссектрис углов ABC и AHC соответственно, лежит на прямой $A'C'$.

Задача 8. (*Всеросс. по геометрии, 2015, 9.7*) В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC высоты AA' и BB' пересекаются в точке H, а медианы треугольника AHB пересекаются в точке M. Прямая CM делит отрезок $A'B'$ пополам. Найдите угол C.

Задача 9. (*Московская устная олимпиада по геометрии, 2009, 10–11*) К двум окружностям ω_1 и ω_2, пересекающимся в точках A и B, проведена их общая касательная CD (C и D — точки касания соответственно, точка B ближе к прямой CD, чем A). Прямая, проходящая через A, вторично пересекает ω_1 и ω_2 в точках K и L соответственно (A лежит между K и L). Прямые KC и LD пересекаются в точке P. Докажите, что PB — симедиана треугольника KPL.

Задача 10. Окружность описана около треугольника ABC. Касательные к окружности, проведённые в точках A и B, пересекаются в точке P. Докажите, что CP является симедианой треугольника ABC.

Указание. Используйте теорему о симметричной бабочке из листка «Инверсия».

Задача 11. (*Всеросс., 1995, ОЭ, 10.3*) В остроугольном треугольнике ABC на высоте BK как на диаметре построена окружность S, пересекающая стороны AB и BC в точках E и F соответственно. К окружности S в точках E и F проведены касательные. Докажите, что их точка пересечения лежит на прямой, содержащей медиану треугольника ABC, проведённую из вершины B.

Задача 12. (*Всеросс. по геометрии, 2012, 10.7*) Дан треугольник ABC. Касательная в точке C к его описанной окружности пересекает прямую AB в точке D. Касательные к описанной окружности треугольника ACD в точках A и C пересекаются в точке K. Докажите, что прямая DK делит отрезок BC пополам.

Задача 13. (*Всеросс. по геометрии, 2014, 10.2*) Даны окружность, её хорда AB и середина W меньшей дуги AB. На большей дуге AB выбирается произвольная точка C. Касательная к окружности, проведённая из точки C, пересекает касательные, проведённые из точек A и B, в точках X и Y соответственно. Прямые WX и WY пересекают прямую AB в точках N и M соответственно. Докажите, что длина отрезка NM не зависит от выбора точки C.

Задача 14. (*Всеросс., 2015, финал, 11.7*) Неравнобедренный треугольник ABC вписан в окружность ω. Касательная к этой окружности в точке C пересекает прямую AB в точке D. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Прямые AI и BI пересекают биссектрису угла CDB в точках Q и P соответственно. Пусть M — середина отрезка PQ. Докажите, что прямая MI проходит через середину дуги ACB окружности ω.

Задача 15. (*Всеросс., 2016, финал, 10.8*) Пусть ABC — остроугольный треугольник, в котором $AC < BC$; пусть M — середина отрезка AB. В окружности ω, описанной около треугольника ABC, проведен диаметр CC'. Прямая CM пересекает прямые AC' и BC' в точках K и L соответственно. Пусть перпендикуляр к прямой AC', проведенный через точку K, перпендикуляр к прямой BC', проведенный через точку L, и прямая AB образуют треугольник Δ. Докажите, что окружность, описанная около треугольника Δ, касается окружности Ω.

Вокруг симедианы

Задача 16. (*Всеросс. по геометрии, 2008, 8*) Пусть CC_0 — медиана треугольника ABC, серединные перпендикуляры к AC и BC пересекают CC_0 в точках A' и B', прямые AA' и BB' пересекаются в точке C_1. Докажите, что $\angle C_1CA = \angle C_0CB$.

Задача 17. (*Всеросс., 2014, РЭ, 10.6*) Треугольник ABC вписан в окружность Ω с центром O. Окружность, построенная на AO как на диаметре, пересекает описанную окружность треугольника OBC в точке $S \neq O$. Касательные к Ω в точках B и C пересекаются в точке P. Докажите, что точки A, S и P лежат на одной прямой.

Задача 18. (*Всеросс., 2013, финал, 9.2*) Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность Ω. Касательные, проведённые к Ω в точках B и C, пересекаются в точке P. Точки D и E — основания перпендикуляров, опущенных из точки P на прямые AB и AC. Докажите, что точка пересечения высот треугольника ADE является серединой отрезка BC.

Задача 19. (*Всеросс., 2013, финал, 9.7*) На сторонах остроугольного треугольника ABC вне него построены квадраты $CAKL$ и $CBMN$. Прямая CN пересекает отрезок AK в точке X, а прямая CL пересекает отрезок BM в точке Y. Точка P, лежащая внутри треугольника ABC, является точкой пересечения окружностей, описанных около треугольников KXN и LYM. Точка S — середина отрезка AB. Докажите, что $\angle ACS = \angle BCP$.

Задача 20. (*Всеросс., 2014, финал, 9.4*) Точка M — середина стороны AC остроугольного треугольника ABC, в котором $AB > BC$. Окружность Ω описана около треугольника ABC. Касательные к Ω, проведённые в точках A и C, пересекаются в точке P. Отрезки BP и AC пересекаются в точке S. Пусть AD — высота треугольника ABP. Окружность ω, описанная около треугольника CSD, пересекает окружность Ω в точке $K \neq C$. Докажите, что $\angle CKM = 90°$.

Задача 21. (*Московская устная олимпиада по геометрии, 2012, 10–11*) Касательные, проведённые к описанной окружности остроугольного треугольника ABC в точках A и C, пересекаются в точке Z. AA_1, CC_1 — высоты. Прямая A_1C_1 пересекает прямые ZA, ZC в точках X и Y соответственно. Докажите, что описанные окружности треугольников ABC и XYZ касаются.