

Симедиана

Пусть дан треугольник ABC и CM — его медиана. Пусть S — такая точка на стороне AB , что луч CS симметричен лучу CM относительно биссектрисы угла C . Тогда отрезок CS называется *симедианой* треугольника ABC .

Во избежание постоянных оговорок удобно называть симедианой и медианой также лучи (или прямые) CS и CM . Тогда можно просто говорить, что симедиана симметрична медиане относительно биссектрисы.

ЗАДАЧА 1. Докажите, что симедиана CS делит сторону на отрезки, которые относятся как квадраты прилежащих сторон:

$$\frac{AS}{BS} = \frac{AC^2}{BC^2}.$$

ЗАДАЧА 2. Докажите, что три симедианы треугольника пересекаются в одной точке (*точка Лемуана*).

ЗАДАЧА 3. Пусть a, b, c — длины сторон треугольника. Докажите, что длина симедианы, проведённой к стороне c , выражается формулой

$$s = \frac{ab}{a^2 + b^2} \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}.$$

ЗАДАЧА 4. Докажите, что в равнобедренном треугольнике симедиана совпадает с высотой в том и только в том случае, если это треугольник прямоугольный.

ЗАДАЧА 5. На прямых CA и CB взяты соответственно точки B' и A' так, что $\angle CA'B' = \angle CAB$ (отрезки AB и $A'B'$ в этом случае называются *антипараллельными*). Докажите, что симедиана CS треугольника ABC делит отрезок $A'B'$ пополам.

ЗАДАЧА 6. Сторона AC треугольника ABC является хордой окружности, касающейся прямой BC в точке C . Вторая окружность проходит через точки B, C и касается прямой AC в точке C . Пусть $D \neq C$ — точка пересечения этих окружностей. Докажите, что CD — симедиана треугольника ABC .

ЗАДАЧА 7. (ММО, 2008, 10) Высоты AA' и CC' остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H . Точка B_0 — середина стороны AC . Докажите, что точка пересечения прямых, симметричных BB_0 и HB_0 относительно биссектрис углов ABC и ACB соответственно, лежит на прямой $A'C'$.

ЗАДАЧА 8. (Всеросс. по геометрии, 2015, 9) В остроугольном равнобедренном треугольнике ABC высоты AA' и BB' пересекаются в точке H , а медианы треугольника AHB пересекаются в точке M . Прямая CM делит отрезок $A'B'$ пополам. Найдите угол C .

ЗАДАЧА 9. (Московская устная олимпиада по геометрии, 2009, 10–11) К двум окружностям ω_1 и ω_2 , пересекающимся в точках A и B , проведена их общая касательная CD (C и D — точки касания соответственно, точка B ближе к прямой CD , чем A). Прямая, проходящая через A , вторично пересекает ω_1 и ω_2 в точках K и L соответственно (A лежит между K и L). Прямые KC и LD пересекаются в точке P . Докажите, что PB — симедиана треугольника KPL .

ЗАДАЧА 10. Окружность описана около треугольника ABC . Касательные к окружности, проведённые в точках A и B , пересекаются в точке P . Докажите, что CP является симедианой треугольника ABC .

Указание. Используйте теорему о симметричной бабочке из листка «Инверсия».

ЗАДАЧА 11. (Всеросс., 1995, округ, 10) В остроугольном треугольнике ABC на высоте BK как на диаметре построена окружность S , пересекающая стороны AB и BC в точках E и F соответственно. К окружности S в точках E и F проведены касательные. Докажите, что их точка пересечения лежит на прямой, содержащей медиану треугольника ABC , проведённую из вершины B .

ЗАДАЧА 12. (Всеросс. по геометрии, 2012, 10) Дан треугольник ABC . Касательная в точке C к его описанной окружности пересекает прямую AB в точке D . Касательные к описанной окружности треугольника ACD в точках A и C пересекаются в точке K . Докажите, что прямая DK делит отрезок BC пополам.

ЗАДАЧА 13. (Всеросс. по геометрии, 2014, 10) Даны окружность, её хорда AB и середина W меньшей дуги AB . На большей дуге AB выбирается произвольная точка C . Касательная к окружности, проведённая из точки C , пересекает касательные, проведённые из точек A и B , в точках X и Y соответственно. Прямые WX и WY пересекают прямую AB в точках N и M соответственно. Докажите, что длина отрезка NM не зависит от выбора точки C .

ЗАДАЧА 14. (Всеросс., 2015, финал, 11) Неравнобедренный треугольник ABC вписан в окружность ω . Касательная к этой окружности в точке C пересекает прямую AB в точке D . Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC . Прямые AI и BI пересекают биссектрису угла CDB в точках Q и P соответственно. Пусть M — середина отрезка PQ . Докажите, что прямая MI проходит через середину дуги ACB окружности ω .

ЗАДАЧА 15. (Всеросс., 2016, финал, 10) Пусть ABC — остроугольный треугольник, в котором $AC < BC$; пусть M — середина отрезка AB . В окружности ω , описанной около треугольника ABC , проведён диаметр CC' . Прямая CM пересекает прямые AC' и BC' в точках K и L соответственно. Пусть перпендикуляр к прямой AC' , проведённый через точку K , перпендикуляр к прямой BC' , проведённый через точку L , и прямая AB образуют треугольник Δ . Докажите, что окружность, описанная около треугольника Δ , касается окружности Ω .

Вокруг симедианы

ЗАДАЧА 16. (Всеросс. по геометрии, 2008, 8) Пусть CC_0 — медиана треугольника ABC , серединные перпендикуляры к AC и BC пересекают CC_0 в точках A' и B' , прямые AA' и BB' пересекаются в точке C_1 . Докажите, что $\angle C_1CA = \angle C_0CB$.

ЗАДАЧА 17. (*Всеросс., 2014, регион, 10*) Треугольник ABC вписан в окружность Ω с центром O . Окружность, построенная на AO как на диаметре, пересекает описанную окружность треугольника OBC в точке $S \neq O$. Касательные к Ω в точках B и C пересекаются в точке P . Докажите, что точки A , S и P лежат на одной прямой.

ЗАДАЧА 18. (*Всеросс., 2013, финал, 9*) Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность Ω . Касательные, проведённые к Ω в точках B и C , пересекаются в точке P . Точки D и E — основания перпендикуляров, опущенных из точки P на прямые AB и AC . Докажите, что точка пересечения высот треугольника ADE является серединой отрезка BC .

ЗАДАЧА 19. (*Всеросс., 2013, финал, 9*) На сторонах остроугольного треугольника ABC вне него построены квадраты $CAKL$ и $CBMN$. Прямая CN пересекает отрезок AK в точке X , а прямая CL пересекает отрезок BM в точке Y . Точка P , лежащая внутри треугольника ABC , является точкой пересечения окружностей, описанных около треугольников KXN и LYM . Точка S — середина отрезка AB . Докажите, что $\angle ACS = \angle BCP$.

ЗАДАЧА 20. (*Всеросс., 2014, финал, 9*) Точка M — середина стороны AC остроугольного треугольника ABC , в котором $AB > BC$. Окружность Ω описана около треугольника ABC . Касательные к Ω , проведённые в точках A и C , пересекаются в точке P . Отрезки BP и AC пересекаются в точке S . Пусть AD — высота треугольника ABP . Окружность ω , описанная около треугольника CSD , пересекает окружность Ω в точке $K \neq C$. Докажите, что $\angle CKM = 90^\circ$.

ЗАДАЧА 21. (*Московская устная олимпиада по геометрии, 2012, 10–11*) Касательные, проведённые к описанной окружности остроугольного треугольника ABC в точках A и C , пересекаются в точке Z . AA_1 , CC_1 — высоты. Прямая A_1C_1 пересекает прямые ZA , ZC в точках X и Y соответственно. Докажите, что описанные окружности треугольников ABC и XYZ касаются.