Полуинварианты

1. (*ОММО, 2016, 9–10*) Карлсон написал дробь $5/8$. Малыш может:

- прибавлять любое натуральное число к числителю и знаменателю одновременно;
- умножать числитель и знаменатель на одно и то же натуральное число.

Сможет ли Малыш с помощью этих действий получить дробь, равную $3/5$?

2. (*«Высшая проба», 2017, 8–9.4*) На доске написано несколько цифр (среди них могут быть одинаковые). На каждом шаге две цифры стираются и пишутся цифры, из которых состоит их произведение. (Например, вместо 5 и 6 пишется 3 и 0, а вместо 2 и 4 пишется 8). Доказать, что через несколько шагов на доске останется одна цифра.

3. (*Всеросс., 1998, округ, 8*) В колоде 52 карты, по 13 каждой масти. Ваня вынимает из колоды по одной карте. Вынутые карты в колоду не возвращаются. Каждый раз перед тем, как вынуть карту, Ваня загадывает какую-нибудь масть. Докажите, что если Ваня каждый раз будет загадывать масть, карт которой в колоде осталось не меньше, чем карт любой другой масти, то загаданная масть совпадет с мастью вынутой карты не менее 13 раз.

4. (*ММО, 2000, 8*) В колоде часть карт лежит рубашкой вниз. Время от времени Петя вынимает из колоды пачку из одной или нескольких подряд идущих карт, в которой верхняя и нижняя карты лежат рубашкой вниз, переворачивает всю пачку как одно целое и вставляет её в то же место колоды (если «пачка» состоит лишь из одной карты, то требуется только, чтобы она лежала рубашкой вниз). Докажите, что в конце концов все карты лягут рубашкой вверх, как бы ни действовал Петя.

5. (*Турнир городов, 1985, 7–8*) На плоскости расположено такое конечное множество точек M, что никакие три точки не лежат на одной прямой. Некоторые точки соединены друг с другом отрезками так, что из каждой точки выходит не более одного отрезка. Разрешается заменить пару пересекающихся отрезков AB и CD парой противоположных сторон AC и BD четырёхугольника $ACBD$. В полученной системе отрезков разрешается снова произвести подобную замену, и т. д. Может ли последовательность таких замен быть бесконечной?

6. (*Турнир городов, 1983, 9–10*) Несколько ребят стоят по кругу. У каждого есть некоторое количество конфет. Сначала у каждого чётное количество конфет. По команде каждый передает половину своих конфет стоящему справа. Если после этого у кого-нибудь оказалось нечётное количество конфет, то ему извне добавляется одна конфета. Это повторяется много раз. Доказать, что настанет время, когда у всех будет поровну конфет.

7. (*Турнир городов, 1984, 7–8*) На шахматной доске $N \times N$ стоят N^2 шашек. Можно ли их переставить так, чтобы любые две шашки, отстоявшие на ход коня, после перестановки отстояли друг от друга лишь на ход короля (то есть стояли рядом)? Рассмотрите два случая:

а) $N = 3$;
б) $N = 8$.

8. (*Всеросс., 2016, финал, 9*) У менялы на базаре есть много ковров. Он согласен взамен ковра размера $a \times b$ дать либо ковёр размера $\frac{1}{a} \times \frac{1}{b}$, либо два ковра размеров $c \times b$ и $\frac{a}{c} \times b$ (при каждом таком обмене число c клиент может выбрать сам). Путешественник рассказал, что изначально у него был один ковёр, стороны которого превосходили 1, а после нескольких таких обменов у него оказался набор ковров, у каждого из которых одна сторона длиннее 1, а другая — короче 1. Не обманывает ли он? (По просьбе клиента меняла готов ковёр размера $a \times b$ считать ковром размера $b \times a$.)

9. (*Всеросс., 2008, финал, 9*) На доске написано натуральное число. Если на доске написано число x, то можно дописать на неё число $2x+1$ или $x/(x+2)$. В какой-то момент выяснилось, что на доске присутствует число 2008. Докажите, что оно там было с самого начала.

10. (*Всеросс., 2012, финал, 9–10*) По кругу стоит 101 мудрец. Каждый из них либо считает, что Земля вращается вокруг Юпитера, либо считает, что Юпитер вращается вокруг Земли. Один раз в минуту все мудрецы одновременно оглашают свои мнения. Сразу после этого каждый мудрец, оба соседа которого думают иначе, чем он, меняет своё мнение, а остальные — не меняют. Докажите, что через некоторое время мнения перестанут меняться.

11. (*Всеросс., 2012, финал, 9*) Изначально на доске записаны 10 последовательных натуральных чисел. За одну операцию разрешается выбрать любые два числа на доске (обозначим их a и b) и заменить их на числа $a^2 - 2011b^2$ и ab. После нескольких таких операций на доске не осталось ни одного из исходных чисел. Могли ли там опять оказаться 10 последовательных натуральных чисел (записанных в некотором порядке)?

12. (*Турнир городов, 1992, 8–9*) Круг разбит на n секторов, в некоторых секторах стоят фишки — всего фишек $n+1$. Затем позиция подвергается преобразованиям. Один шаг преобразования состоит в следующем: берутся какие-нибудь две фишки, стоящие в одном секторе, и переставляются в разные стороны в соседние секторы. Докажите, что через некоторое число шагов не менее половины секторов будет занято.

13. (*Турнир городов, 2016, 8–9*) У Деда Мороза было n сортов конфет, по k штук каждого сорта. Он распределил все конфеты как попало по k подаркам, в каждый — по n конфет, и раздал их k детям. Дети решили восстановить справедливость. Два ребёнка готовы передать друг другу по конфете, если каждый получает конфету сорта, которого у него нет. Всегда ли можно организовать серию обменов так, что у каждого окажутся конфеты всех сортов?

14. (*ММО, 1996, 9*) Али-Баба и разбойник делят клад, состоящий из 100 золотых монет, разложенных в 10 кучек по 10 монет. Али-Баба выбирает 4 кучки, ставит около каждой из них по кружке, откладывает в каждую кружку по несколько монет (не менее одной, но не всю кучку). Разбойник должен как-то переставить кружки, изменив их первоначальное расположение, после чего монеты высыпаются из кружек в те кучки, около которых оказались кружки. Далее Али-Баба снова выбирает 4 кучки из 10, ставит около них кружки, и т. д. В любой момент Али-Баба может уйти, унеся с собой любые три кучки по выбору. Остальные монеты достаются разбойнику. Какое наибольшее число монет сможет унести Али-Баба, если разбойник тоже старается получить побольше монет?

$\boxed{72}$

15. (*Турнир городов, 1984, 9–10*) По одной стороне бесконечного коридора расположено бесконечное количество комнат, занумерованных числами от минус бесконечности до плюс бесконечности. В комнатах живут 9 пианистов (в одной комнате могут жить несколько пианистов), кроме того, в каждой комнате находится по роялю. Каждый день какие-то два пианиста, живущие в соседних комнатах (k-й и $(k+1)$-й), приходят к выводу, что они мешают друг другу, и переселяются соответственно в $(k-1)$-ю и $(k+2)$-ю комнаты. Докажите, что через конечное число дней эти переселения прекратятся. (Пианисты, живущие в одной комнате, друг другу не мешают.)

16. (*Турнир городов, 2016, 10–11*) Шеренга состоит из N ребят попарно различного роста. Её разбили на наименьшее возможное количество групп стоящих подряд ребят, в каждой из которых ребята стоят по возрастанию роста слева направо (возможны группы из одного человека). Потом в каждой группе переставили ребят по убыванию роста слева направо. Докажите, что после $N-1$ такой операции ребята будут стоять по убыванию роста слева направо.

17. (*ММО, 2008, 11*) Станок выпускает детали двух типов. На ленте его конвейера выложены в одну линию 75 деталей. Пока конвейер движется, на станке готовится деталь того типа, которого на ленте меньше. Каждую минуту очередная деталь падает с ленты, а подготовленная кладется в ее конец. Через некоторое число минут после включения конвейера может случиться так, что расположение деталей на ленте впервые повторит начальное. Найдите:

а) наименьшее такое число,

б) все такие числа.

18. (*Всеросс., 2009, финал, 9*) По кругу стоят 100 наперстков. Под одним из них спрятана монетка. За один ход разрешается перевернуть четыре наперстка и проверить, лежит ли под одним из них монетка. После этого их возвращают в исходное положение, а монетка перемещается под один из соседних с ней наперстков. За какое наименьшее число ходов наверняка удастся обнаружить монетку?

19. (*Турнир городов, 2016, 10–11*) Шеренга состоит из N ребят попарно различного роста. Её разбили на наименьшее возможное количество групп стоящих подряд ребят, в каждой из которых ребята стоят по возрастанию роста слева направо (возможны группы из одного человека). Потом в каждой группе переставили ребят по убыванию роста слева направо. Докажите, что после $N-1$ такой операции ребята будут стоять по убыванию роста слева направо.