Полуинварианты

Некоторые задачи могут решаться с помощью следующего рассуждения. Рассмотрим некоторую величину S, связанную с конфигурацией задачи, и операцию O, меняющую эту конфигурацию и, соответственно, величину S. Пусть при этом S меняется *монотонно* (например, увеличивается). Тогда:

- если S может принимать лишь конечный набор значений, то рано или поздно S достигнет максимума;
- если целочисленная величина S может принимать бесконечное множество значений, то рано или поздно S станет больше любого наперёд заданного числа.

Монотонно меняющаяся величина S называется в этом случае *полуинвариантом.*

Первая часть

Задачи первой части листка (номера 1–18) присутствуют здесь благодаря статье Л. Курляндчика и Д. Фомина «Этюды о полуинварианте» («Квант», 1989, №7).

1. (*ММО, 1961, 9.2, 10.3*) В клетки таблицы $m \times n$ вписаны некоторые числа. Разрешается одновременно менять знак у всех чисел некоторого столбца или некоторой строки. Доказать, что многократным повторением этой операции можно превратить данную таблицу в такую, у которой суммы чисел, стоящих в каждом столбце и каждой строке, неотрицательны.

2. На плоскости даны n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, и n прямых, никакие две из которых не параллельны. Докажите, что из этих точек можно опустить попарно непересекающиеся перпендикуляры на эти прямые так, чтобы на каждую прямую был опущен ровно один перпендикуляр.

3. Докажите, что любые $2n$ точек на плоскости являются концами непересекающихся отрезков.

4. (*Задачник «Кванта», М114*) По кругу выписано несколько чисел. Если для некоторых четырёх идущих подряд чисел a, b, c, d оказывается, что $(a-d)(b-c) < 0$, то числа b и c можно поменять местами. Докажите, что эту операцию можно проделать лишь конечное число раз.

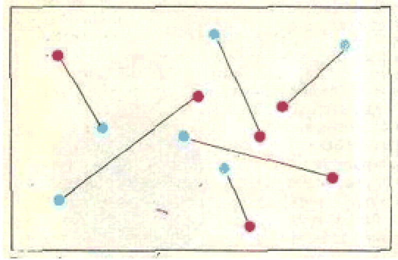
5. С невыпуклым многоугольником производятся следующие операции. Если он лежит по одну сторону от прямой AB, где A и B — несмежные вершины многоугольника, то одна из частей, на которые контур многоугольника делится точками A и B, центрально симметрично отражается относительно отрезка AB. Докажите, что после нескольких таких операций многоугольник станет выпуклым.

6. (*Всесоюз., 1979, 8.3, 9.3, 10.3*) В парламенте у каждого его члена не более трёх врагов. Докажите, что парламент можно разбить на две палаты так, что у каждого парламентария в одной с ним палате будет не более одного врага.

7. (*ММО, 1964, 11.5*) При дворе короля Артура собрались $2N$ рыцарей, причём каждый из них имеет среди присутствующих не более $N-1$ врага. Доказать, что Мерлин, советник Артура, может так рассадить рыцарей за Круглым Столом, что ни один из них не будет сидеть рядом со своим врагом.

8. На доске в один ряд произвольным образом написаны N чисел, каждое из которых равно $+1$ или -1. За один ход разрешается поменять знак у нескольких подряд идущих чисел. За какое наименьшее число ходов можно заведомо получить из исходного набора набор из одних единиц?

9. (*Задачник «Кванта», М301*) На плоскости заданы $2n$ точек — n синих и n красных, причём никакие три точки не лежат на одной прямой. Докажите, что можно провести n отрезков так, что у каждого отрезка один конец лежит в красной точке, другой — в синей точке, и никакие два отрезка не имеют общих точек.



10. На плоскости дано N точек, некоторые из которых соединены отрезками. Известно, что из любой точки выходит не более 11 отрезков. Докажите, что эти точки можно раскрасить в четыре цвета так, чтобы отрезков с одноцветными концами было не более N.

11. (*Всесоюз., 1974, 10.3*) Задано несколько красных и несколько синих точек. Некоторые из них соединены отрезками. Назовём точку «особой», если более половины из соединённых с ней точек имеют цвет, отличный от её цвета. Если есть хотя бы одна особая точка, то выбирается любая особая точка и перекрашивается в другой цвет. Докажите, что через конечное число шагов не останется ни одной особой точки.

12. На каждой грани куба написано число, причём не все эти числа одинаковы. Каждое из написанных чисел заменяется на среднее арифметическое чисел, написанных на четырёх соседних гранях. Могут ли через несколько таких операций на всех гранях оказаться исходные числа?

13. (*ЛМО, 1973, 8.5, 9.4*) По окружности выписано несколько натуральных чисел. Между каждыми двумя соседними числами вписывается их наибольший общий делитель. Затем старые числа стираются и над оставшимися проделывают ту же операцию. Докажите, что через несколько шагов все числа на окружности станут равными.

14. (*ЛМО, 1984, 8.4, 9.4, 10.1*) Даны числа: единица и девять нулей. Разрешается выбрать два числа и заменить каждое их средним арифметическим. Какое наименьшее число может оказаться на месте единицы после серии таких операций?

15. (*Всесоюз., 1973, 10.3*) На бесконечном клетчатом листе белой бумаги n клеток закрашено в чёрный цвет. В моменты времени $t = 1, 2, \ldots$ происходит одновременное перекрашивание всех клеток листа по следующему правилу: каждая клетка k принимает тот цвет, который имело в предыдущий момент большинство из трёх клеток: самой клетки k и её соседей справа и сверху (если две или три из этих клеток были белыми, то k становится белой; если две или три из них были чёрными — то чёрной).

а) Доказать, что через конечное время на листе не останется чёрных клеток.

б) Доказать, что чёрные клетки исчезнут не позже, чем в момент времени $t = n$.

16. (*ЛМО, 1983, 9.3, 10.2*) По кругу стоят несколько ребят, у каждого из них несколько конфет. По сигналу ведущего каждый передаёт половину своих конфет стоящему справа от него (если число конфет у кого-либо нечётно, то ведущий предварительно добавляет ему одну конфету). Это повторяется много раз. Докажите, что когда-нибудь у всех ребят будет поровну конфет.

17. (*Задачник «Кванта», M870*) По одной стороне бесконечного коридора расположено бесконечное число комнат, занумерованных по порядку целыми числами, и в каждой стоит по роялю. В этих комнатах живёт некоторое конечное число пианистов. (В одной комнате может жить и несколько пианистов.) Каждый день какие-то два пианиста, живущие в соседних комнатах — k-й и $(k+1)$-й, – приходят к выводу, что они мешают друг другу, и переселяются соответственно в $(k-1)$-ю и $(k+2)$-ю комнаты. Докажите, что через конечное число дней эти переселения прекратятся.

18. (*Ленинград, 1987*) Пьяный библиотекарь каждую минуту снимает с полки какой-то том Британской Энциклопедии, стоящий не на своём месте, и ставит его на своё место (т. е. если номер тома равен k, то он ставит его k-м по счёту). Если в некоторый момент все тома окажутся на своих местах, то библиотекарь запишется в Общество Трезвости. Может ли Общество однозначно рассчитывать на пополнение своих рядов?

Вторая часть

19. (*ОММО, 2016, 9–10*) Карлсон написал дробь 5/8. Малыш может:

- прибавлять любое натуральное число к числителю и знаменателю одновременно;
- умножать числитель и знаменатель на одно и то же натуральное число.

Сможет ли Малыш с помощью этих действий получить дробь, равную 3/5?

20. (*«Высшая проба», 2017, 8.4, 9.4*) На доске написано несколько цифр (среди них могут быть одинаковые). На каждом шаге две цифры стираются и пишутся цифры, из которых состоит их произведение. (Например, вместо 5 и 6 пишется 3 и 0, а вместо 2 и 4 пишется 8). Доказать, что через несколько шагов на доске останется одна цифра.

21. (*ММО, 2002, 9.1*) Шеренга новобранцев стояла лицом к сержанту. По команде «налево» некоторые повернулись налево, некоторые — направо, а остальные — кругом. Всегда ли сержант сможет встать в строй так, чтобы с обеих сторон от него оказалось поровну новобранцев, стоящих к нему лицом?

22. (*ММО, 2000, 8.5*) В колоде часть карт лежит рубашкой вниз. Время от времени Петя вынимает из колоды пачку из одной или нескольких подряд идущих карт, в которой верхняя и нижняя карты лежат рубашкой вниз, переворачивает всю пачку как одно целое и вставляет её в то же место колоды (если «пачка» состоит лишь из одной карты, то требуется только, чтобы она лежала рубашкой вниз). Докажите, что в конце концов все карты лягут рубашкой вверх, как бы ни действовал Петя.

23. (*Всеросс., 1998, ОЭ, 8.3*) В колоде 52 карты, по 13 каждой масти. Ваня вынимает из колоды по одной карте. Вынутые карты в колоду не возвращаются. Каждый раз перед тем, как вынуть карту, Ваня загадывает какую-нибудь масть. Докажите, что если Ваня каждый раз будет загадывать масть, карт которой в колоде осталось не меньше, чем карт любой другой масти, то загаданная масть совпадет с мастью вынутой карты не менее 13 раз.

24. (*Олимпиада им. Эйлера, РЭ, 2017.8*) На доске написано 100 натуральных чисел, среди которых ровно 33 нечётных. Каждую минуту на доску дописывается сумма всех попарных произведений всех чисел, уже находящихся на ней (например, если на доске были записаны числа 1, 2, 3, 3, то следующим ходом было дописано число $1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3$). Можно ли утверждать, что рано или поздно на доске появится число, делящееся на $2^{10000000}$?

25. (*Всеросс., 2016, финал, 9.1*) У менялы на базаре есть много ковров. Он согласен взамен ковра размера $a \times b$ дать либо ковёр размера $\frac{1}{a} \times \frac{1}{b}$, либо два ковра размеров $c \times b$ и $\frac{a}{c} \times b$ (при каждом таком обмене число c клиент может выбрать сам). Путешественник рассказал, что изначально у него был один ковёр, стороны которого превосходили 1, а после нескольких таких обменов у него оказался набор ковров, у каждого из которых одна сторона длиннее 1, а другая — короче 1. Не обманывает ли он? (По просьбе клиента меняла готов ковёр размера $a \times b$ считать ковром размера $b \times a$.)

26. (*Всеросс., 2012, финал, 9.5, 10.5*) По кругу стоит 101 мудрец. Каждый из них либо считает, что Земля вращается вокруг Юпитера, либо считает, что Юпитер вращается вокруг Земли. Один раз в минуту все мудрецы одновременно оглашают свои мнения. Сразу после этого каждый мудрец, оба соседа которого думают иначе, чем он, меняет своё мнение, а остальные — не меняют. Докажите, что через некоторое время мнения перестанут меняться.

27. (*Всеросс., 2008, финал, 9.7*) На доске написано натуральное число. Если на доске написано число x, то можно дописать на неё число $2x + 1$ или $x/(x + 2)$. В какой-то момент выяснилось, что на доске присутствует число 2008. Докажите, что оно там было с самого начала.

28. (*Всеросс., 2012, финал, 9.7*) Изначально на доске записаны 10 последовательных натуральных чисел. За одну операцию разрешается выбрать любые два числа на доске (обозначим их a и b) и заменить их на числа $a^2 - 2011b^2$ и ab. После нескольких таких операций на доске не осталось ни одного из исходных чисел. Могли ли там опять оказаться 10 последовательных натуральных чисел (записанных в некотором порядке)?

29. (*Всеросс., 2009, финал, 9.4*) По кругу стоят 100 напёрстков. Под одним из них спрятана монетка. За один ход разрешается перевернуть четыре наперстка и проверить, лежит ли под одним из них монетка. После этого их возвращают в исходное положение, а монетка перемещается под один из соседних с ней наперстков. За какое наименьшее число ходов наверняка удастся обнаружить монетку?

30. (*ММО, 1996, 9.6*) Али-Баба и разбойник делят клад, состоящий из 100 золотых монет, разложенных в 10 кучек по 10 монет. Али-Баба выбирает 4 кучки, ставит около каждой из них по кружке, откладывает в каждую кружку по несколько монет (не менее одной, но не всю кучку). Разбойник должен как-то переставить кружки, изменив их первоначальное расположение, после чего монеты высыпаются из кружек в те кучки, около которых оказались кружки. Далее Али-Баба снова выбирает 4 кучки из 10, ставит около них кружки, и т. д. В любой момент Али-Баба может уйти, унеся с собой любые три кучки по выбору. Остальные монеты достаются разбойнику. Какое наибольшее число монет сможет унести Али-Баба, если разбойник тоже старается получить побольше монет?

31. (*ММО, 2008, 11.5*) Станок выпускает детали двух типов. На ленте его конвейера выложены в одну линию 75 деталей. Пока конвейер движется, на станке готовится деталь того типа, которого на ленте меньше. Каждую минуту очередная деталь падает с ленты, а подготовленная кладется в ее конец. Через некоторое число минут после включения конвейера может случиться так, что расположение деталей на ленте впервые повторит начальное. Найдите:

а) наименьшее такое число,

б) все такие числа.

32. (*Турнир городов, 1985, 7–8*) На плоскости расположено такое конечное множество точек M, что никакие три точки не лежат на одной прямой. Некоторые точки соединены друг с другом отрезками так, что из каждой точки выходит не более одного отрезка. Разрешается заменить пару пересекающихся отрезков AB и CD парой противоположных сторон AC и BD четырёхугольника $ACBD$. В полученной системе отрезков разрешается снова произвести подобную замену, и т. д. Может ли последовательность таких замен быть бесконечной?

33. (*Турнир городов, 1983, 9–10*) Несколько ребят стоят по кругу. У каждого есть некоторое количество конфет. Сначала у каждого чётное количество конфет. По команде каждый передает половину своих конфет стоящему справа. Если после этого у кого-нибудь оказалось нечётное количество конфет, то ему извне добавляется одна конфета. Это повторяется много раз. Доказать, что настанет время, когда у всех будет поровну конфет.

34. (*Турнир городов, 1984, 7–8*) На шахматной доске $N \times N$ стоят N^2 шашек. Можно ли их переставить так, чтобы любые две шашки, отстоявшие на ход коня, после перестановки отстояли друг от друга лишь на ход короля (то есть стояли рядом)? Рассмотрите два случая:

а) $N = 3$;

б) $N = 8$.

35. (*Турнир городов, 1992, 8–9*) Круг разбит на n секторов, в некоторых секторах стоят фишки — всего фишек $n + 1$. Затем позиция подвергается преобразованиям. Один шаг преобразования состоит в следующем: берутся какие-нибудь две фишки, стоящие в одном секторе, и переставляются в разные стороны в соседние секторы. Докажите, что через некоторое число шагов не менее половины секторов будет занято.

36. (*Турнир городов, 2016, 8–9*) У Деда Мороза было n сортов конфет, по k штук каждого сорта. Он распределил все конфеты как попало по k подаркам, в каждый — по n конфет, и раздал их k детям. Дети решили восстановить справедливость. Два ребёнка готовы передать друг другу по конфете, если каждый получает конфету сорта, которого у него нет. Всегда ли можно организовать серию обменов так, что у каждого окажутся конфеты всех сортов?

37. (*Турнир городов, 1984, 9–10*) По одной стороне бесконечного коридора расположено бесконечное количество комнат, занумерованных числами от минус бесконечности до плюс бесконечности. В комнатах живут 9 пианистов (в одной комнате могут жить несколько пианистов), кроме того, в каждой комнате находится по роялю. Каждый день какие-то два пианиста, живущие в соседних комнатах (k-й и $(k + 1)$-й), приходят к выводу, что они мешают друг другу, и переселяются соответственно в $(k - 1)$-ю и $(k + 2)$-ю комнаты. Докажите, что через конечное число дней эти переселения прекратятся. (Пианисты, живущие в одной комнате, друг другу не мешают.)

38. (*Турнир городов, 2016, 10–11*) Шеренга состоит из N ребят попарно различного роста. Её разбили на наименьшее возможное количество групп стоящих подряд ребят, в каждой из которых ребята стоят по возрастанию роста слева направо (возможны группы из одного человека). Потом в каждой группе переставили ребят по убыванию роста слева направо. Докажите, что после $N-1$ такой операции ребята будут стоять по убыванию роста слева направо.

39. (*Турнир городов, 2016, 10–11*) Шеренга состоит из N ребят попарно различного роста. Её разбили на наименьшее возможное количество групп стоящих подряд ребят, в каждой из которых ребята стоят по возрастанию роста слева направо (возможны группы из одного человека). Потом в каждой группе переставили ребят по убыванию роста слева направо. Докажите, что после $N-1$ такой операции ребята будут стоять по убыванию роста слева направо.