Сборная солянка

1. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 5–8*) В тесте четыре раздела, каждый из которых содержит одинаковое количество вопросов. Андрей правильно ответил на 20 вопросов. При этом процент его верных ответов оказался больше 60, но меньше 70. Сколько вопросов было в тесте?

32

2. (*«Высшая проба», 2015, 7–8*) Петя, Саша и Миша играют в теннис на вылет. Игра на вылет означает, что в каждой партии играют двое, а третий ждёт. Проигравший партию уступает место третьему и в следующей партии сам становится ждущим. Петя сыграл всего 12 партий, Саша — 7 партий, Миша — 11 партий. Сколько раз Петя выиграл у Саши?

4

3. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017, 7–8.6, 9.5*) Написаны 2017 чисел. Известно, что сумма квадратов любых 7 из них равна 7, сумма любых 11 из них положительна, а сумма всех 2017 чисел делится на 9. Найдите эти числа.

4. (*«Высшая проба», 2014, 7–8*) Вдоль берега круглого озера растут яблони. Петя и Вася начинают идти из точки A на берегу в противоположных направлениях вдоль берега и считают все яблони, встретившиеся им на пути, а также все яблоки, растущие на яблонях. Встретившись в некоторой точке B, они сверили результаты. Оказалось, что Петя насчитал вдвое больше яблонь, чем Вася, и в семь раз больше яблок, чем Вася. Их удивил этот результат, и они решили повторить эксперимент. Они отправились из точки B в тех же направлениях, что изначально, и встретились снова в точке C. Оказалось, что на пути от B до C Петя опять насчитал вдвое больше яблонь чем Вася, и в семь раз больше яблок, чем Вася. Их удивление стало ещё больше, и они опять решили повторить эксперимент. Отправившись из C в тех же направлениях, они встретились в точке D. Оказалось, что Петя опять насчитал вдвое больше яблонь, чем Вася. Кто из них на пути от C до D насчитал больше яблок и во сколько раз?

На пути от C до D Вася насчитал в три раза больше яблок, чем Петя

5. (*«Высшая проба», 2016, 7–9*) Слова языка роботов планеты Шелезяка — последовательности стрелочек «вверх», «вниз», «влево» и «вправо», причём две противонаправленные стрелочки не могут стоять рядом. Учитель написал на доске 1000000 слов этого языка. Четыре ученика переписывают слова к себе в тетрадь, делая следующие изменения: ученик U приписывает перед словом стрелочку «вверх», а если это запрещено (слово начинается с «вниз»), то убирает это первое «вниз»; ученики D, L, R делают всё то же самое, только приписывают соответственно стрелку «вниз», «вправо», «влево». Докажите, что в одной из четырёх тетрадей минимум половина (500000) слов не будет встречаться среди слов на доске.

6. (*Всеросс., 2015, II этап, 8*) Гномы сели за круглый стол и голосованием решили много вопросов. По каждому вопросу можно было голосовать «за», «против» или воздержаться. Если оба соседа какого-либо гнома по какому-нибудь вопросу выбрали один и тот же вариант ответа, то при голосовании по следующему вопросу он выберет этот же вариант. А если они выбрали два разных варианта, то при голосовании по следующему вопросу гном выберет третий вариант. Известно, что по вопросу «Блестит ли золото?» все гномы проголосовали «за», а по вопросу «Страшен ли Дракон?» Торин воздержался. Сколько могло быть гномов? (Опишите все возможности и докажите, что других нет.)

Число гномов — любое, кратное четырём

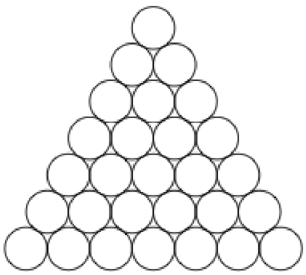
7. (*«Курчатов», 2016, 8*) Через точку с координатами $(2, 2)$ проведены прямые (включая две параллельные осям координат), которые делят плоскость на углы в 18°. Найдите сумму абсцисс точек пересечения этих прямых с прямой $y = 2016 - x$.

10080

8. (*«Курчатов», 2016, 10*) Через точку с координатами $(10, 9)$ проведены прямые (включая параллельные осям координат), которые делят плоскость на углы в 10°. Найдите сумму абсцисс точек пересечения этих прямых с прямой $y = 101 - x$.

867

9. (*ММО, 2010, 8.2*) На столе в виде треугольника выложены 28 монет одинакового размера (рис.). Известно, что суммарная масса любой тройки монет, которые попарно касаются друг друга, равна 10 г. Найдите суммарную массу всех 18 монет на границе треугольника.



60 г

10. (*ММО, 2013, 8*) По кругу расставили 1000 чисел, среди которых нет нулей, и раскрасили их поочередно в белый и чёрный цвета. Оказалось, что каждое чёрное число равно сумме двух соседних с ним белых чисел, а каждое белое число равно произведению двух соседних с ним чёрных чисел. Чему может быть равна сумма всех расставленных чисел?

375

11. (*Турнир городов, 2015, 8–9*) Секретная база окружена прозрачным извилистым забором в форме невыпуклого многоугольника, снаружи — болото. Через болото проложена прямая линия электропередач из 36 столбов, часть из которых стоит снаружи базы, а часть — внутри. (Линия электропередач не проходит через вершины забора.) Шпион обходит базу снаружи вдоль забора так, что забор всё время по правую руку от него. Каждый раз, оказавшись на линии электропередач, он считает, сколько всего столбов находится по левую руку от него (он их все видит). К моменту, когда шпион обошёл весь забор, он насчитал в сумме 2015 столбов. Сколько столбов находится внутри базы?

Один

12. (*ММО, 2014, 8*) В городе Плоском нет ни одной башни. Для развития туризма жители города собираются построить несколько башен общей высотой в 30 этажей.

Инспектор Высотников, поднимаясь на каждую башню, считает число более низких башен, а потом складывает получившиеся величины. После чего инспектор рекомендует город тем сильнее, чем получившаяся величина больше. Сколько и какой высоты башен надо построить жителям, чтобы получить наилучшую возможную рекомендацию?

Либо 16 одноэтажных и 7 двухэтажных, либо 14 одноэтажных и 8 двухэтажных башен

13. (*«Ломоносов», 2015, 8–9*) Все натуральные числа разбили на «хорошие» и «плохие» по следующим правилам:

1) из любого плохого числа можно вычесть некоторое натуральное число, не превосходящее его половины, так, чтобы получившаяся разность стала хорошей;

2) из хорошего числа нельзя вычесть не более половины так, чтобы оно осталось хорошим.

Известно, что число 1 — хорошее. Найдите ближайшее к 2015 хорошее число.

2047

14. (*«Ломоносов», 2011, 8–9*) Петя и Ваня составили из кубиков столбики по четыре кубика в каждом, но действовали по разным правилам: у Пети в каждом столбике есть кубики красного, жёлтого, зелёного и синего цветов, а у Вани — только красного, жёлтого и зелёного цветов. Оказалось, что все составленные столбики между собой различны, причём ни Петя, ни Ваня, следуя своим правилам, новых столбиков составить не могут. Кто из мальчиков составил больше столбиков и во сколько раз?

Ваня составил в полтора раза больше

15. (*ОММО, 2016, 9–10*) У Пети имеется 50 шариков трёх цветов: красные, синие и зелёные. Известно, что среди любых 34 шариков есть хотя бы один красный; среди любых 35 — синий; среди любых 36 — зелёный. Сколько шариков зелёного цвета может быть у Пети?

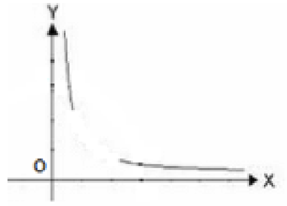
15, 16 или 17

16. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015, 9*) Будем обозначать $\max(A, B, C)$ наибольшее из чисел A, B, C. Найдите наименьшее значение величины

$$\max\left(x^2 + |y|, (x+2)^2 + |y|, x^2 + |y-1|\right).$$

$\frac{3}{2}$

17. (*«Курчатов», 2014, 9*) На плоскости нарисованы оси координат и график функции $y = 2/x$ при $x > 0$. Масштаб не указан, но известно, что он по обеим осям одинаков. К сожалению, небольшой кусок графика вблизи начала координат был нечаянно стёрт (см. рисунок) С помощью циркуля и линейки восстановите на данном графике точку с абсциссой 1.



18. (*Всеросс., 2015, II этап, 9*) Из шахматной доски размером 8×8 вырезали квадрат размером 2×2 так, что оставшуюся доску удалось разрезать на прямоугольники размером 1×3. Определите, какой квадрат могли вырезать. (*Укажите все возможные варианты и докажите, что других нет.*)

Центральный, угловые и пять несмежных с ними — итого 9 квадратов

19. (*«Курчатов», 2014, 10*) На плоскости нарисованы оси координат и график функции $y = \frac{2}{x}$. Масштаб не указан, но известно, что он по обеим осям одинаков. С помощью циркуля и линейки постройте на данном графике точку, у которой абсцисса положительна и на 2 меньше ординаты.

20. (*Всеросс., 2015, регион, 10*) На плоскости отметили все вершины правильного n-угольника, а также его центр. Затем нарисовали контур этого n-угольника, и центр соединили со всеми вершинами; в итоге n-угольник разбился на n треугольников. Вася записал в каждую отмеченную точку по числу (среди чисел могут быть равные). В каждый треугольник разбиения он записал в произвольном порядке три числа, стоящих в его вершинах; после этого он стёр числа в отмеченных точках. При каких n по тройкам чисел, записанным в треугольниках, Петя всегда сможет восстановить число в каждой отмеченной точке?

При нечётных n

21. (*Всеросс., 2015, I этап, 11*) Убирая детскую комнату к приходу гостей, мама нашла 9 носков. Среди любых четырёх носков хотя бы два принадлежат одному хозяину. А среди любых пяти носков не больше трёх имеют одного хозяина. Сколько детей разбросало носки, и сколько носков принадлежит каждому ребенку?

Детей трое, каждому принадлежит по три носка

22. (*ОММО, 2014*) Даны 2014 положительных чисел. Известно, что произведение любых тридцати пяти из них меньше единицы. Докажите, что произведение всех данных чисел меньше единицы.

23. (*«Ломоносов», 2014, 10–11*) Прямоугольная таблица состоит из 5681 одинаковых клеток. Петя и Вася пронумеровали клетки натуральными числами 1, 2, …, 5681 подряд. Петя нумеровал клетки по строкам слева направо (сначала первую строку, затем вторую и т. д.), а Вася — по столбцам сверху вниз (сначала первый столбец, затем второй и т. д.). Оказалось, что ровно в 5 клетках их номера совпали. Чему равна сумма числа строк и числа столбцов в этой таблице?

450

24. (*«Ломоносов», 2009*) Настенные часы сломались, отчего минутная стрелка стала в произвольные моменты времени мгновенно менять направление своего движения на противоположное, вращаясь со своей прежней угловой скоростью. Все потенциальные показания (в минутах) этой стрелки целиком заполняют промежуток $[0; 60)$.

а) Может ли такая стрелка в течение одного часа бесконечно много раз показать каждое из двух чисел 10 и 40?

б) Какое наибольшее количество раз в течение четырёх суток может встретиться самое редкое (за эти четверо суток) показание такой стрелки?

а) Да; б) 96

25. (*«Ломоносов», 2007*) В течение четверти учитель по пению ставил детям оценки «1», «2», «3», «4» и «5». Среднее арифметическое всех оценок Вовочки оказалось равным в точности 3,5. И тогда по предложению Вовочки учитель заменил одну его оценку «4» парой оценок «3» и «5». Докажите, что от этого средняя оценка Вовочки по пению увеличилась. Найдите наибольшее возможное её значение после такой замены:

а) одной оценки «4»;

б) всех его оценок «4».

а) $3\frac{2}{3}$; б) $3\frac{8}{11}$

26. (*«Ломоносов», 2005*) При каждом натуральном n тело Φ_n в координатном пространстве задано неравенством

$$|2x|^n + |y|^n + 7|z|^n < 1,$$

а тело Φ — объединение всех тел Φ_n. Найдите объём тела Φ.

4

27. (*«Высшая проба», 2014, 10–11*) Пусть $p > 2$ — целое число, не делящееся на 3. Докажите, что существуют такие целые числа a_1, a_2, …, a_k, что

$$-\frac{p}{2} < a_1 < a_2 < \ldots < a_k < \frac{p}{2}$$

и произведение

$$\frac{p-a_1}{|a_1|} \cdot \frac{p-a_2}{|a_2|} \cdot \ldots \cdot \frac{p-a_k}{|a_k|}$$

равно 3^m для некоторого натурального m.

28. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2012, 10–11*) Пусть α_1, α_2, …, α_{2012} — арифметическая прогрессия с разностью d, причём $\cos\alpha_k \neq 0$ для всех $k = 1, 2, \ldots, 2012$ и

$$\frac{1}{\cos\alpha_1 \cdot \cos\alpha_2} + \frac{1}{\cos\alpha_2 \cdot \cos\alpha_3} + \ldots + \frac{1}{\cos\alpha_{2011} \cdot \cos\alpha_{2012}} = 0.$$

Найдите все возможные значения d, не превосходящие по модулю π.

$\frac{\pi n}{2011}$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm 2010$

29. (*«Ломоносов», 2015, 10–11*) Для любого натурального n и для любого набора чисел x_1, x_2, …, x_n из отрезка $[0;3]$ уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} |x - x_i| = an$$

имеет решение x, принадлежащее отрезку $[0;3]$. Укажите, какие из следующих значений a удовлетворяют этому условию: a) $a = 0$; b) $a = \frac{3}{2}$; c) $a = 2$.

Только $a = \frac{3}{2}$

30. (*Всеросс., 2016, регион, 10–11*) По кругу стоят n мальчиков и n девочек. Назовём пару из мальчика и девочки *хорошей*, если на одной из дуг между ними стоит поровну мальчиков и девочек (в частности, стоящие рядом мальчик и девочка образуют хорошую пару). Оказалось, что есть девочка, которая участвует ровно в 10 хороших парах. Докажите, что есть и мальчик, который участвует ровно в 10 хороших парах.

31. (*Всеросс., 2016, финал, 9–10*) Квадрат разбит на $n^2 \geqslant 4$ прямоугольников $2(n-1)$ прямыми, из которых $n-1$ параллельны одной стороне квадрата, а остальные $n-1$ — другой. Докажите, что можно выбрать $2n$ прямоугольников разбиения таким образом, что для любых двух выбранных прямоугольников один из них можно поместить в другой (возможно, предварительно повернув).

32. (*Олимпиада ВШЭ, 2011, 11*) Центры трёх шаров с радиусами 1, 2, 3 образуют правильный треугольник со стороной 100500. Найти геометрическое место точек пересечения медиан треугольников ABC таких, что точка A лежит в первом шаре, точка B — во втором шаре, а точка C — в третьем шаре.

Шар радиуса 2 с центром в центре данного правильного треугольника

33. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2012, 10–11*) Последовательность выпуклых четырёхугольников

$$P_1Q_1R_1S_1, \quad P_2Q_2R_2S_2, \quad \ldots, \quad P_{2012}Q_{2012}R_{2012}S_{2012}$$

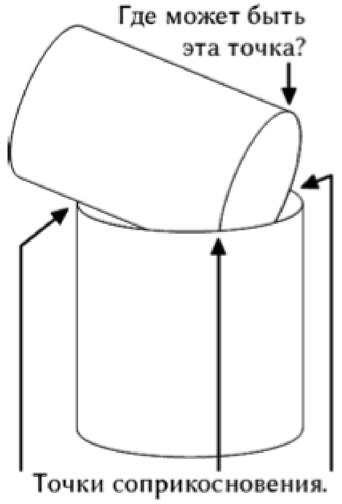
такова, что вершины четырёхугольника $P_{n+1}Q_{n+1}R_{n+1}S_{n+1}$ являются серединами сторон четырёхугольника $P_nQ_nR_nS_n$ ($n = 1, 2, \ldots, 2011$).

а) Может ли отношение периметров четырёхугольников $P_{2012}Q_{2012}R_{2012}S_{2012}$ и $P_1Q_1R_1S_1$ равняться $32 \cdot 10^{-303}$?

б) Найдите все возможные значения этого отношения.

а) Нет; б) $(2^{-1006}; 2^{-1005})$

34. (*«Высшая проба», 2013, 11*) Даны два высоких цилиндрических стакана радиусов r и R, $r < R$. Широкий поставили на горизонтальный стол, а узкий всевозможными способами помещают на него так, что он опирается на кромку широкого двумя точками своей кромки и одной точкой боковой поверхности (см. рисунок). Опишите геометрическое место точек пространства, в которых при этом может оказаться верхняя точка кромки узкого стакана, соприкасающейся с широким.



Боковая поверхность цилиндра. . .

35. (*«Высшая проба», 2015, 11*) В пространстве даны 270 шаров равных радиусов, любые два из которых пересекаются. Докажите, что среди них можно выбрать 10 шаров так, что найдётся точка, принадлежащая всем выбранным шарам.

36. (*ММО, 2015, 11*) День в Анчурии может быть либо ясным, когда весь день солнце, либо дождливым, когда весь день льёт дождь. И если сегодня день не такой, как вчера, то анчурийцы говорят, что сегодня погода изменилась. Однажды анчурийские ученые установили, что 1 января день всегда ясный, а каждый следующий день в январе будет ясным, только если ровно год назад в этот день погода изменилась. В 2015 году январь в Анчурии был весьма разнообразным: то солнце, то дожди. В каком году погода в январе впервые будет меняться ровно так же, как в январе 2015 года?

37. (*ММО, 2014, 11*) У повара в подчинении десять поварят, некоторые из которых дружат между собой. Каждый рабочий день повар назначает одного или нескольких поварят на дежурство, а каждый из дежурных поварят уносит с работы по одному пирожному каждому своему недежурящему другу. В конце дня повар узнает количество пропавших пирожных. Сможет ли он за 45 рабочих дней понять, кто из поварят дружит между собой, а кто нет?

Да