Рекуррентные соотношения в комбинаторике

Говорят, что последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ задана *рекуррентно*, если существует формула, выражающая n-й член этой последовательности через один или несколько предыдущих членов; такая формула называется *рекуррентным соотношением*.

Например, рекуррентное соотношение $a_{n+1} = a_n + 3$ с начальным условием $a_1 = 2$ задаёт арифметическую прогрессию 2, 5, 8, 11, ...

Задача. (*«Физтех», 2014, 8–9*) На доску выписаны числа $a_1, a_2, \ldots, a_{200}$. Известно, что $a_1 = 3$, $a_2 = 9$. Найдите a_{200}, если для любого натурального n справедливо равенство $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$.

Решение. Начнём выписывать члены нашей последовательности:

$$a_1 = 3, \quad a_2 = 9, \quad a_3 = 6, \quad a_4 = -3, \quad a_5 = -9, \quad a_6 = -6, \quad a_7 = 3, \quad a_8 = 9, \quad \ldots$$

Как видим, последовательность «зацикливается» — она периодична с периодом 6 (то есть $a_{n+6} = a_n$). Иными словами, равны все члены последовательности, номера которых дают при делении на 6 одинаковые остатки. Номер 200 имеет остаток 2 от деления на 6. Значит, $a_{200} = a_2 = 9$.

Некоторые задачи комбинаторики можно решить, если составить для искомой величины рекуррентное соотношение, после чего вычислить эту величину вплоть до нужного значения n. Посмотрим, как это делается.

Задача. Сколько существует строк длины 10, состоящих из нулей и единиц, таких, что никакие два нуля не стоят рядом?

Решение. Говоря в решении этой задачи о строках, мы имеем в виду строки, описанные в условии, то есть составленные из нулей и единиц так, что никакие два нуля не стоят рядом.

Обозначим через x_n число строк длины n. Ясно, что $x_1 = 2$ (это строки 0 и 1), $x_2 = 3$ (это строки 01, 10 и 11). Будем искать рекуррентное соотношение, задающее последовательность x_n.

Предположим, что $n \geqslant 3$. Пусть N_1 — число строк длины n, которые начинаются с единицы. Вторым числом такой строки может быть либо 0, либо 1; иными словами, к первой цифре 1 «пристыковывается» любая строка длины $n-1$. Поэтому строк, начинающихся с единицы, столько же, сколько существует строк длины $n-1$, то есть $N_1 = x_{n-1}$.

Пусть теперь N_0 — число строк длины n, которые начинаются с нуля. Вторым числом такой строки обязательно служит единица, а к этой единице уже «пристыковывается» любая строка длины $n-2$. Поэтому $N_0 = x_{n-2}$.

В результате получаем:

$$x_n = N_1 + N_0 = x_{n-1} + x_{n-2} \quad (n \geqslant 3).$$

Теперь с учётом начальных условий $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ находим:

$$x_3 = x_2 + x_1 = 5; \quad x_4 = x_3 + x_2 = 8; \quad x_5 = x_4 + x_3 = 13,$$

и так далее вплоть до интересующего нас значения $x_{10} = 144$. Таким образом, строк длины 10 получается 144.

Заметим, что полученная последовательность 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ... — это знаменитые *числа Фибоначчи*.

Задача. Сколько слов длины 5 можно составить из букв a, b и c так, чтобы буквы a и b не стояли рядом?

Решение. Пусть x_n — число слов длины n (описанных в условии). Ясно, что $x_1 = 3$ (это слова a, b и c). Если $n = 2$, то все возможные слова суть aa, ac, bb, bc, ca, cb, cc; таким образом, $x_2 = 7$.

Обозначим a_n, b_n и c_n число слов длины n, начинающихся с буквы a, b и c соответственно. Тогда, очевидно,

$$x_n = a_n + b_n + c_n. \tag{1}$$

Предположим, что $n \geqslant 3$. Пусть слово длины n начинается с буквы a. Поскольку на втором месте не может быть b, к букве a «пристыковывается» любое слово длины $n-1$, начинающееся с a или c. Поэтому

$$a_n = a_{n-1} + c_{n-1}. \tag{2}$$

Аналогично:

$$b_n = b_{n-1} + c_{n-1}, \tag{3}$$

$$c_n = a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1} = x_{n-1}. \tag{4}$$

Сложим (2) и (3), после чего используем (4):

$$a_n + b_n = (a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1}) + c_{n-1} = x_{n-1} + c_{n-1} = x_{n-1} + x_{n-2}.$$

Подставляем это в (1):

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2} + c_n = x_{n-1} + x_{n-2} + x_{n-1} = 2x_{n-1} + x_{n-2}.$$

Итак, имеем рекуррентное соотношение:

$$x_n = 2x_{n-1} + x_{n-2} \quad (n \geqslant 3;\ x_1 = 3,\ x_2 = 7).$$

Последовательно вычисляем: $x_3 = 17$, $x_4 = 41$ и, наконец, $x_5 = 99$. Итак, слов длины 5 получается 99.

Задача. Шеренга солдат называется неправильной, если никакие три подряд стоящих солдата не стоят по росту (ни в порядке возрастания, ни в порядке убывания). Сколько неправильных шеренг можно построить из n солдат разного роста?

Решение. Случаи $n = 4$ и $n = 5$ предлагались в качестве задачи в листке «Перебор вариантов». Сейчас мы рассмотрим данную задачу в общем виде.

Пусть x_n — число неправильных шеренг длины n. Как и в предыдущих задачах, ищем рекуррентное соотношение для x_n.

Рассмотрим неправильную шеренгу длины $n+1$ ($n \geqslant 1$). Пусть Z — самый высокий солдат шеренги. Он может стоять на любом месте от 1 до $n+1$ (перечисляем солдат слева направо). Предположим, что Z стоит на $(k+1)$-м месте ($k = 0, 1, \ldots, n$); то есть, слева от Z стоят k солдат (которых можно выбрать C_n^k способами), а справа от Z стоят оставшиеся $n-k$ солдат.

Заметим, что слева от Z стоит неправильная шеренга длины k, но не произвольная, а такая, у которой предпоследний солдат X выше последнего солдата Y (в противном случае солдаты X, Y и Z окажутся стоящими по росту). Ясно, что таких шеренг вдвое меньше общего числа неправильных шеренг длины k; стало быть, слева от Z можно выстроить $x_k/2$ шеренг. Чтобы это было справедливо при $k = 0$ и $k = 1$ (одна шеренга в обоих случаях), мы полагаем $x_0 = x_1 = 2$.

Аналогично, справа от Z стоит неправильная шеренга длины $n-k$, но не произвольная, а такая, у которой второй солдат выше первого. Таких шеренг будет $x_{n-k}/2$.

Остаётся заметить, что k солдат слева от Z можно выбрать C_n^k способами (и при каждом таком способе однозначно выбраны $n-k$ солдат справа от Z). Таким образом, если Z стоит на k-м месте, то число неправильных шеренг будет равно

$$C_n^k \cdot \frac{x_k}{2} \cdot \frac{x_{n-k}}{2} = \frac{1}{4} C_n^k x_k x_{n-k}.$$

Суммируя по k, находим число неправильных шеренг длины $n+1$:

$$x_{n+1} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n} C_n^k x_k x_{n-k} \quad (n = 1, 2, \ldots;\ x_0 = x_1 = 2).$$

Читатель может самостоятельно убедиться, что выполнены равенства $x_4 = 10$ и $x_5 = 32$ — это результат задачи 11 листка «Перебор вариантов».

Задачи

1. (*«Физтех», 2014, 10–11*) Последовательность a_n такова, что $a_1 = 4$, $a_2 = 25$. Найдите a_{200}, если для любого натурального n справедливо равенство $a_{n+1} = a_n \cdot a_{n+2}$.

25

2. Сколько семибуквенных слов можно составить из букв a и b так, чтобы после буквы a стояла хотя бы одна буква b? (Букве a разрешается быть последней.)

34

3. Сколько имеется разбиений отрезка длины 8 на отрезки длины 1, 2 и 3? (Разбиения, отличающиеся порядком следования отрезков, считаются различными.)

81

4. (*«Ломоносов», 2014, 10–11*) Первоклассница Маша, заходя в школу, каждый раз поднимается на школьное крыльцо по лестнице, имеющей 9 ступенек. Находясь внизу лестницы или на очередной её ступеньке, она может либо подняться на следующую ступеньку, либо перепрыгнуть через одну ступеньку вверх (перепрыгнуть через две или более ступенек Маша пока не может). Какое минимальное количество раз Маше нужно зайти в школу, чтобы подняться на крыльцо всеми возможными способами?

55

5. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2012, 7–8*) Мария Ивановна — строгая учительница по алгебре. Она ставит в журнал только двойки, тройки и четвёрки, причём никогда не ставит одному ученику две двойки подряд. Известно, что она поставила Вовочке 6 оценок за четверть. Сколькими различными способами она могла это сделать?

448

6. (*«Физтех», 2014, 11*) Кузнечик прыгает по вершинам правильного треугольника ABC, прыгая каждый раз в одну из соседних вершин. Сколькими способами он может попасть из вершины A обратно в вершину A за 9 прыжков?

170

7. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2011, 9–11*) Имеются 12 карандашей попарно различной длины. Сколькими способами можно уложить их в коробку в два слоя по шесть карандашей так, чтобы в каждом слое карандаши были упорядочены по возрастанию длины (слева направо), а каждый карандаш верхнего слоя лежал строго над карандашом нижнего слоя и был короче его?

132

8. (*«Высшая проба», 2014, 11*) На клетчатой доске размером $2 \times n$ клеток некоторые клетки закрашиваются в чёрный цвет. Раскраска называется правильной, если среди закрашенных нет двух соседних клеток (соседними называются клетки, имеющие общую сторону). Раскраска, в которой ни одна клетка не закрашена, тоже считается правильной.

Пусть A_n — количество правильных раскрасок с чётным числом закрашенных клеток, B_n — количество правильных раскрасок с нечётным числом закрашенных клеток. Найдите все возможные значения $A_n - B_n$.

$\boxed{\pm 1}$