Рекуррентные соотношения

1. (*ММО, 1964, 7.5*) Последовательность a_0, a_1, a_2, ... образована по закону: $a_0 = a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n a_{n-1} + 1$. Доказать, что число a_{1964} не делится на 4.

2. (*ММО, 1993, 9.2*) Найдите x_{1000}, если $x_1 = 4$, $x_2 = 6$ и при любом натуральном $n \geqslant 3$ x_n — наименьшее составное число, большее $2x_{n-1} - x_{n-2}$.

3. (*Всеросс., 2000, финал, 9.5*) На доску последовательно выписываются числа $a_1 = 1$, a_2, a_3, ... по следующим правилам: $a_{n+1} = a_n - 2$, если число $a_n - 2$ — натуральное и ещё не выписано на доску; в противном случае $a_{n+1} = a_n + 3$. Докажите, что все квадраты натуральных чисел появятся в этой последовательности при прибавлении 3 к предыдущему числу.

4. (*Турнир городов, 1996, 8–9*) Последовательность определяется так: первые её члены — 1, 2, 3, 4, 5. Далее каждый следующий (начиная с 6-го) равен произведению всех предыдущих членов минус 1. Докажите, что сумма квадратов первых 70 членов последовательности равна их произведению.

5. (*Турнир городов, 1995, 8–9*) Можно ли из последовательности 1, 1/2, 1/3, ... выбрать (сохраняя порядок)

а) сто чисел,

б) бесконечную подпоследовательность чисел,

из которых каждое, начиная с третьего, равно разности двух предыдущих ($a_k = a_{k-2} - a_{k-1}$)?

6. (*Турнир городов, 1993, 8–9*) Числовая последовательность определяется условиями:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + \left[\sqrt{a_n}\,\right].$$

Докажите, что среди членов этой последовательности бесконечно много полных квадратов.

7. (*Турнир городов, 1991, 8–9*) Числовая последовательность $\{x_n\}$ такова, что для каждого $n > 1$ выполняется условие $x_{n+1} = |x_n| - x_{n-1}$. Докажите, что последовательность периодическая с периодом 9.

8. (*Турнир городов, 2009, 8–11*) В бесконечной последовательности a_1, a_2, a_3, ... число a_1 равно 1, а каждое следующее число a_n строится из предыдущего a_{n-1} по правилу: если у числа n наибольший нечётный делитель имеет остаток 1 от деления на 4, то $a_n = a_{n-1} + 1$, если же остаток равен 3, то $a_n = a_{n-1} - 1$. Докажите, что в этой последовательности

а) число 1 встречается бесконечно много раз;

б) каждое натуральное число встречается бесконечно много раз.

(Вот первые члены этой последовательности: 1, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 3, ...)

9. (*«Высшая проба», 2017, 9.6*) Последовательность $\{a_n\}$ определена следующим образом:

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1 \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Докажите неравенства

$$0,\underbrace{99\ldots9}_{2017} < \sum_{i=1}^{2017} \frac{1}{a_i} < 1.$$

10. (*Всеросс., 1994, финал, 11.5*) Дана последовательность натуральных чисел a_1, a_2, …, a_n, в которой a_1 не делится на 5 и для всякого n

$$a_{n+1} = a_n + b_n,$$

где b_n — последняя цифра числа a_n. Докажите, что последовательность содержит бесконечно много степеней двойки.

11. (*Всеросс., 2006, финал, 11.5*) Последовательности положительных чисел (x_n) и (y_n) удовлетворяют условиям

$$x_{n+2} = x_n + x_{n+1}^2, \quad y_{n+2} = y_n^2 + y_{n+1}.$$

при всех натуральных n. Докажите, что если все числа x_1, x_2, y_1, y_2 больше 1, то $x_n > y_n$ при каком-нибудь натуральном n.

12. (*Всеросс., 2012, регион, 10.3*) Последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots$ задана условиями $a_1 = 1$, $a_2 = 143$ и

$$a_{n+1} = 5 \cdot \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

при всех $n \geqslant 2$. Докажите, что все члены последовательности — целые числа.

13. (*Всеросс., 2004, финал, 10.5*) Последовательность неотрицательных рациональных чисел a_1, a_2, $a_3, \ldots$ удовлетворяет соотношению $a_m + a_n = a_{mn}$ при любых натуральных m, n. Докажите, что не все её члены различны.

14. (*Всеросс., 1995, округ, 11.6*) Числовая последовательность a_0, a_1, $a_2, \ldots$ такова, что при всех неотрицательных m и n $(m \geqslant n)$ выполняется соотношение

$$a_{m+n} + a_{m-n} = \frac{1}{2}\left(a_{2m} + a_{2n}\right).$$

Найдите a_{1995}, если $a_1 = 1$.

15. (*Всеросс., 1999, финал, 10.2*) Найдите все бесконечные ограниченные последовательности натуральных чисел a_1, a_2, a_3, …, для всех членов которых, начиная с третьего, выполнено

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{(a_{n-1}, a_{n-2})}.$$

16. (*Всеросс., 2003, финал, 10.6*) Последовательность натуральных чисел a_n строится следующим образом:

a_0 — некоторое натуральное число;

$a_{n+1} = a_n/5$, если a_n делится на 5;

$a_{n+1} = \left[a_n\sqrt{5}\right]$, если a_n не делится на 5.

Докажите, что начиная с некоторого члена последовательность a_n возрастает.

17. (*Всеросс., 2008, округ, 10.4, 11.3*) Последовательность (a_n) задана условиями

$$a_1 = 1000000, \quad a_{n+1} = n\left[\frac{a_n}{n}\right] + n.$$

Докажите, что в ней можно выделить бесконечную подпоследовательность, являющуюся арифметической прогрессией.

18. (*Всеросс., 1998, округ, 10.8*) Загадано число от 1 до 144. Разрешается выделить одно подмножество множества чисел от 1 до 144 и спросить, принадлежит ли ему загаданное число. За ответ «да» надо заплатить 2 рубля, за ответ «нет» — 1 рубль. Какая наименьшая сумма денег необходима для того, чтобы наверняка угадать число?

19. (*Всеросс., 2009, финал, 11.2*) Последовательность $a_1, a_2, \ldots$ такова, что $a_1 \in (1;2)$ и

$$a_{k+1} = a_k + \frac{k}{a_k}$$

при любом натуральном k. Докажите, что в ней не может существовать более одной пары членов с целой суммой.

20. (*Всеросс., 2008, финал, 10.4*) Последовательности (a_n) и (b_n) заданы условиями

$$a_1 = 1, \quad b_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1 + a_n + a_n b_n}{b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{1 + b_n + a_n b_n}{a_n}.$$

Докажите, что $a_{2008} < 5$.

21. (*Всеросс., 1993, финал, 10.8*) Назовем усреднением последовательности a_k действительных чисел последовательность a'_k с общим членом

$$a'_k = \frac{a_k + a_{k+1}}{2}.$$

Рассмотрим последовательности: a_k, a'_k — её усреднение, a''_k — усреднение последовательности a'_k, и т. д. Если все эти последовательности состоят из целых чисел, то будем говорить, что последовательность a_k — хорошая. Докажите, что если последовательность x_k — хорошая, то последовательность x_k^2 — тоже хорошая.

22. (*Всеросс., 2007, финал, 11.4*) В бесконечной последовательности (x_n) первый член x_1 — рациональное число, большее 1, и

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{[x_n]}$$

при всех натуральных n. Докажите, что в этой последовательности есть целое число.

23. (*Турнир городов, 1999, 10–11*) В ряд стоят 1999 чисел. Первое число равно 1. Известно, что каждое число, кроме первого и последнего, равно сумме двух соседних. Найдите последнее число.

24. (*Турнир городов, 1994, 10–11*) Последовательность натуральных чисел a_1, a_2, ..., a_n, ... такова, что для каждого n уравнение $a_{n+2}x^2 + a_{n+1}x + a_n = 0$ имеет действительный корень. Может ли число членов этой последовательности быть

а) равным 10;

б) бесконечным?

25. (*Турнир городов, 1993, 10–11*) Числовая последовательность определяется условиями:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + [\sqrt{a_n}\,] .$$

Сколько полных квадратов встречается среди первых членов этой последовательности, не превосходящих 1000000?

26. (*Турнир городов, 2009, 10–11*) В ячейку памяти компьютера записали число 6. Далее компьютер делает миллион шагов. На шаге номер n он увеличивает число в ячейке на наибольший общий делитель этого числа и n. Докажите, что на каждом шаге компьютер увеличивает число в ячейке либо на 1, либо на простое число.

27. (*ММО, 1977, 10.4*) Последовательность натуральных чисел (x_n) строится по следующему правилу: $x_1 = 2$, $x_{n+1} = [1{,}5x_n]$. Доказать, что последовательность $y_n = (-1)^{x_n}$ непериодическая.

28. (*ММО, 2015, 11.3*) У Ивана-царевича есть два сосуда ёмкостью по 1 л, один из которых полностью заполнен обычной водой, а в другом находится a л живой воды, $0 < a < 1$. Он может переливать только из сосуда в сосуд любой объём жидкости до любого уровня без переполнений и хочет за конечное число таких переливаний получить 40-процентный раствор живой воды в одном из сосудов. При каких значениях a Иван-царевич сможет это сделать? Считайте, что уровень жидкости в каждом из сосудов можно точно измерить в любой момент времени.

29. (*ММО, 2015, 11.4*) День в Анчурии может быть либо ясным, когда весь день солнце, либо дождливым, когда весь день льет дождь. И если сегодня день не такой, как вчера, то анчурийцы говорят, что сегодня погода изменилась. Однажды анчурийские ученые установили, что 1 января день всегда ясный, а каждый следующий день в январе будет ясным, только если ровно год назад в этот день погода изменилась. В 2015 году январь в Анчурии был весьма разнообразным: то солнце, то дожди. В каком году погода в январе впервые будет меняться ровно так же, как в январе 2015 года?