

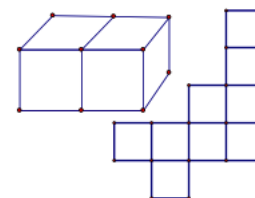
## Разрезания

1. (*Олимпиада им. Эйлера и Всеросс., РЭ, 8–10.1*) Разбейте какой-нибудь клетчатый квадрат на клетчатые квадратики так, чтобы не все квадратики были одинаковы, но квадратики каждого размера было одно и то же количество.

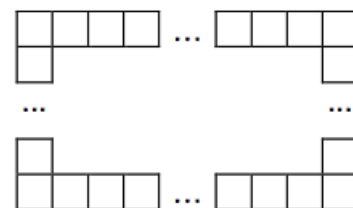
2. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 5–9*) Дан квадрат  $1 \times 1$ . Разрежьте его на 5 прямоугольников так, чтобы все 10 чисел, соответствующие ширине и высоте каждого прямоугольника, были различными рациональными числами.

3. (*«Высшая проба», 2015, 7–8*) Одна сторона прямоугольника в 5 раз длиннее другой. Покажите, как разрезать этот прямоугольник на 5 частей и сложить из них квадрат. Части можно переворачивать и поворачивать, но нельзя накладывать друг на друга, и внутри квадрата не должно быть непокрытых участков.

4. (*Всеросс., 2014, ШЭ, 8–9*) Петя разрезал бумажный параллелепипед  $2 \times 1$  по его рёбрам и получил развёртку. Потом Дима отрезал один квадратик от этой развёртки, и осталось девять квадратиков, как на рисунке. Где мог быть отрезанный квадратик? Нарисуйте полную развёртку и отметьте на ней отрезанный квадратик. (*Достаточно привести один правильный вариант развёртки.*)

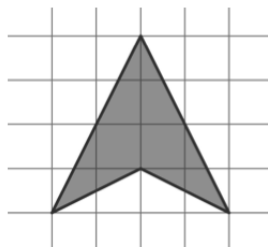


5. (*Всеросс., 2018, МЭ, 8.1*) Из 1812 одинаковых квадратов со стороной 1 мм сделали прямоугольную рамку для групповой фотографии (см. рисунок, границы фотографии совпадают с внутренними границами рамки). Потом фотографию разрезали по линии миллиметровой сетки на две прямоугольные части. Теперь понадобилось две рамки, на которые ушло 2018 таких же квадратов. Найдите размеры исходной фотографии.

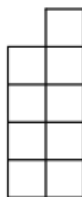


$$(111) \ 808 \times 101$$

6. (*«Высшая проба», 2014, 8*) Разрежьте фигуру, изображённую на рисунке ниже, на три части так, чтобы из них можно было сложить прямоугольник. Покажите, как именно сложить из них прямоугольник. Разрезы могут идти не по линиям сетки. Части можно переворачивать.



7. («Ломоносов», 2011, 8–9) Разрежьте фигуру, изображённую на рисунке, на три части так, чтобы линии разреза не проходили по сторонам клеток и чтобы из частей можно было сложить квадрат. Предложите как можно большее число способов такого разрезания.



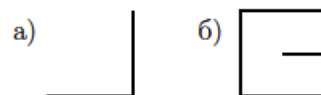
8. («Высшая проба», 2013, 8) Дан прямоугольник с длинами сторон 5 и 6. Разбейте его на семь неперекрывающихся прямоугольников с целочисленными сторонами, параллельными сторонам исходного прямоугольника, так, чтобы площади этих семи прямоугольников были попарно различны.

9. (Олимпиада им. Эйлера, 2016, финал) Можно ли прямоугольник  $1000 \times 2016$  разрезать на прямоугольники  $1 \times 2015$  и трёхклеточные «уголки» так, чтобы присутствовали фигурки обоих видов?

Нет

10. («Высшая проба», 2013, 9) Дан квадрат с длиной стороны 9. Разбейте его на девять неперекрывающихся прямоугольников с целочисленными сторонами, параллельными сторонам квадрата, так, чтобы площади этих девяти прямоугольников были попарно различны.

11. (ММО, 2017, 9.3) Существует ли клетчатый многоугольник, который можно поделить на две равные части разрезом такой формы? Разрез должен лежать внутри многоугольника (на границу могут выходить только концы разреза).



12. («Высшая проба», 2015, 9) Одна сторона прямоугольника в 5 раз длиннее другой. Покажите, как разрезать этот прямоугольник на 4 части и сложить из них квадрат. Части можно переворачивать и поворачивать, но нельзя накладывать друг на друга, и внутри квадрата не должно быть непокрытых участков.

13. (Турнир городов, 2016, 8–11) Дан квадрат со стороной 10. Разрежьте его на 100 равных четырёхугольников, каждый из которых вписан в окружность диаметра  $\sqrt{3}$ .


14. (Турнир городов, 2017, 10–11) Петя нарисовал многоугольник площадью 100 клеток, проводя границы по линиям квадратной сетки. Он проверил, что его можно разрезать по границам клеток и на два равных многоугольника, и на 25 равных многоугольников. Обязательно ли тогда его можно разрезать по границам клеток и на 50 равных многоугольников?

15. (Турнир городов, 2017, 10–11) Можно ли квадрат со стороной 1 разрезать на две части и покрыть ими какой-нибудь круг диаметра больше 1?

16. («Курчатов», 2014, 11) Разделите равнобедренный прямоугольный треугольник на два меньших треугольника так, чтобы какая-то медиана одного из этих треугольников была параллельна одной из высот второго треугольника.

**17.** (ММО, 2018, 11.2) Имеются одна треугольная и одна четырёхугольная пирамиды, все рёбра которых равны 1. Покажите, как разрезать их на несколько частей и склеить из этих частей куб (без пустот и щелей, все части должны использоваться).

**18.** (Всеросс., 2017, РЭ, 9.7, 10.7) Выпуклый многоугольник разрезан непересекающимися диагоналями на равнобедренные треугольники. Докажите, что в этом многоугольнике найдутся две равные стороны.

**19.** (Всеросс., 2016, финал, 9.4) Из клетчатого бумажного квадрата  $100 \times 100$  вырезали по границам клеток 1950 двуклеточных прямоугольников. Докажите, что из оставшейся части можно вырезать по границам клеток четырёхклеточную фигурку вида  — возможно, повёрнутую. (Если такая фигурка уже есть среди оставшихся частей, считается, что её получилось вырезать.)

**20.** (ММО, 2018, 10.6) Докажите, что количество способов разрезать квадрат  $999 \times 999$  на уголки из трёх клеток делится на  $2^7$ .