

Радикальная ось

Вспомогательная задача. Дана окружность ω радиуса r . На расстоянии d от её центра расположена точка M . Прямая l , проходящая через M , пересекает окружность ω в точках A и B . Докажите, что произведение $MA \cdot MB$ не зависит от выбора прямой l и равно $|d^2 - r^2|$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Величина $d^2 - r^2$ называется степенью точки M относительно окружности ω .

Соответственно, степень положительна для точек вне окружности и отрицательна для точек внутри окружности (а для точек окружности степень равна нулю).

ЗАДАЧА 1. Докажите, что:

а) степень точки, лежащей внутри окружности, по модулю равна квадрату полухорды, проходящей через эту точку;

б) степень точки, лежащей вне окружности, равна квадрату касательной, проведённой к окружности через данную точку.

ЗАДАЧА 2. Найдите:

а) степень точки $M(2, 3)$ относительно окружности $x^2 - 4x + y^2 + 2y - 4 = 0$;

б) степень точки $M(x_0, y_0)$ относительно окружности $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

$$\boxed{d^2 - r^2 = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2}$$

ЗАДАЧА 3. Покажите, что геометрическое место точек, степени которых относительно двух неконцентрических окружностей равны, есть прямая, перпендикулярная линии центров этих окружностей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Прямая, состоящая из точек, степени которых относительно двух данных окружностей равны, называется радикальной осью этих окружностей.

ЗАДАЧА 4. Покажите, что:

а) общая касательная двух окружностей делится их радикальной осью пополам;

б) радикальная ось двух пересекающихся окружностей проходит через точки их пересечения;

в) радикальная ось двух касающихся окружностей есть их общая касательная, проведённая в точке касания;

г) радикальная ось двух непересекающихся окружностей не пересекает ни одну из них.

ЗАДАЧА 5. (*Радикальный центр трёх окружностей*) Даны три окружности, центры которых не лежат на одной прямой. Докажите, что три радикальные оси (каждой пары окружностей) пересекаются в одной точке.

ЗАДАЧА 6. (*ММО, 2013, 11.3*) Дан такой выпуклый четырёхугольник $ABCD$, что $AB = BC$ и $AD = DC$. Точки K , L и M — середины отрезков AB , CD и AC соответственно. Перпендикуляр, проведённый из точки A к прямой BC , пересекается с перпендикуляром, проведённым из точки C к прямой AD , в точке H . Докажите, что прямые KL и HM перпендикулярны.

ЗАДАЧА 7. (ММО, 2013, 10.6) Пусть I — центр вписанной окружности неравнобедренного треугольника ABC . Через A_1 обозначим середину дуги BC описанной окружности треугольника ABC , не содержащей точки A , а через A_2 — середину дуги BAC . Перпендикуляр, опущенный из точки A_1 на прямую A_2I , пересекает прямую BC в точке A' . Аналогично определяются точки B' и C' .

а) Докажите, что точки A' , B' и C' лежат на одной прямой.

б) Докажите, что эта прямая перпендикулярна прямой OI , где O — центр описанной окружности треугольника ABC .

ЗАДАЧА 8. (Московская устная олимпиада по геометрии, 2011, 10–11) Дана неравнобокая трапеция $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Произвольная окружность, проходящая через точки A и B , пересекает боковые стороны трапеции в точках P и Q , а диагонали — в точках M и N . Докажите, что прямые PQ , MN и CD пересекаются в одной точке.

ЗАДАЧА 9. (Московская устная олимпиада по геометрии, 2009, 10–11) На медианах треугольника как на диаметрах построены три окружности. Известно, что они попарно пересекаются. Пусть C_1 — более удалённая от вершины C точка пересечения окружностей, построенных на медианах AM_1 и BM_2 . Точки A_1 и B_1 определяются аналогично. Докажите, что прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

ЗАДАЧА 10. (Московская устная олимпиада по геометрии, 2014, 10–11) Медианы AA_0 , BB_0 и CC_0 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке M , а высоты AA_1 , BB_1 и CC_1 — в точке H . Касательная к описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ в точке C_1 пересекает прямую A_0B_0 в точке C' . Точки A' и B' определяются аналогично. Докажите, что A' , B' и C' лежат на одной прямой, перпендикулярной прямой MH .

ЗАДАЧА 11. (Московская устная олимпиада по геометрии, 2013, 10–11) В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AP и BQ , а также медиана CM . Точка R — середина CM . Прямая PQ пересекает прямую AB в точке T . Докажите, что $OR \perp TC$, где O — центр описанной окружности треугольника ABC .