

# Квадратные уравнения

## Содержание

1	Неполные квадратные уравнения . . . . .	1
2	Выделение полного квадрата . . . . .	1
3	Формула корней . . . . .	2
4	Упрощённая формула корней при чётном $b$ . . . . .	3
5	Теорема Виета . . . . .	3
6	Разложение квадратного трёхчлена на множители . . . . .	7
7	Задачи . . . . .	7

В данной статье мы разберём основные вопросы, связанные с квадратным уравнением: выведем формулу корней, докажем теорему Виета и научимся раскладывать квадратный трёхчлен на множители.

**Квадратное уравнение** — это уравнение вида

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0. \tag{1}$$

Числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  называются *коэффициентами* уравнения (1). Выражение  $ax^2 + bx + c$ , в котором  $a \neq 0$ , называется *квадратным трёхчленом*.

## 1 Неполные квадратные уравнения

Квадратное уравнение (1) называется *неполным*, если  $b = 0$  или  $c = 0$ . В этих тривиальных случаях совершенно ясно, как надо действовать.

**ЗАДАЧА 1.** Решить уравнение  $2x^2 - 5 = 0$ .

**РЕШЕНИЕ.** Имеем:

$$2x^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}.$$

**ЗАДАЧА 2.** Решить уравнение  $x^2 + 3x = 0$ .

**РЕШЕНИЕ.** Имеем:

$$x(x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = -3. \end{cases}$$

## 2 Выделение полного квадрата

Любое квадратное уравнение можно решить, не помня формулу корней. Для этого нужно выделить полный квадрат.

**ЗАДАЧА 3.** Решить уравнение  $x^2 + 4x - 5 = 0$ .

**РЕШЕНИЕ.** Прибавим к обеим частям по 9:

$$x^2 + 4x + 4 = 9 \Leftrightarrow (x + 2)^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = 3, \\ x + 2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x = -5. \end{cases}$$

ЗАДАЧА 4. Решить уравнение  $2x^2 - 9x + 3 = 0$ .

РЕШЕНИЕ. Умножим обе части уравнения на 2:

$$\begin{aligned} 4x^2 - 18x = -6 &\Leftrightarrow (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot \frac{9}{2} + \left(\frac{9}{2}\right)^2 = \frac{81}{4} - 6 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(2x - \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{57}{4} \Leftrightarrow 2x - \frac{9}{2} = \pm \frac{\sqrt{57}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{57}}{4}. \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 5. Решить уравнение  $x^2 + 5x + 7 = 0$ .

РЕШЕНИЕ. Имеем:

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{5}{2} + \frac{25}{4} = \frac{25}{4} - 7 \Leftrightarrow \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4}.$$

Решений нет.

### 3 Формула корней

Процедуру выделения полного квадрата можно применить к уравнению (1) в общем случае. Именно так получается хорошо известная вам формула вычисления корней квадратного уравнения. Имеем:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 &\Leftrightarrow a^2x^2 + abx + ac = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (ax)^2 + 2ax \cdot \frac{b}{2} + \frac{b^2}{4} = \frac{b^2}{4} - ac \Leftrightarrow \left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4}. \end{aligned}$$

Величина  $D = b^2 - 4ac$  называется *дискриминантом* уравнения (1). Таким образом,

$$\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{D}{4}. \quad (2)$$

В зависимости от значения дискриминанта возможны три случая.

1.  $D < 0$ . Тогда уравнение (2) не имеет корней. Следовательно, не имеет корней и равносильное ему уравнение (1).
2.  $D = 0$ . Тогда уравнение (2) — а значит, и уравнение (1) — имеет единственный корень:

$$\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow ax + \frac{b}{2} = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = -\frac{b}{2a}}. \quad (3)$$

3.  $D > 0$ . Тогда уравнение (2) — а значит, и уравнение (1) — имеет два различных корня:

$$ax + \frac{b}{2} = \pm \frac{\sqrt{D}}{2} \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}}. \quad (4)$$

Формула (4) как раз и есть формула корней квадратного уравнения (1). Легко видеть, что формула (3) является её частным случаем при  $D = 0$ .

## 4 Упрощённая формула корней при чётном $b$

При  $b = 2k$  возникает полезная модификация формулы (4). Рассмотрим уравнение

$$ax^2 + 2kx + c = 0. \quad (5)$$

Его дискриминант:

$$D = 4k^2 - 4ac = 4(k^2 - ac).$$

Тогда формула (4) даёт:

$$x = \frac{-2k \pm \sqrt{4(k^2 - ac)}}{2a} = \frac{-2k \pm 2\sqrt{k^2 - ac}}{2a} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}.$$

Это и есть формула для корней уравнения (5). Учитывая ещё, что  $k^2 - ac = D/4$ , запишем эту формулу в виде:

$$\boxed{x = \frac{-k \pm \sqrt{D/4}}{a}}. \quad (6)$$

Знать эту формулу очень рекомендуется — она поможет вам сэкономить драгоценное время на экзамене.

**ЗАДАЧА 6.** Решить уравнение  $3x^2 + 26x - 64 = 0$ .

**РЕШЕНИЕ.** Здесь  $k = 13$ , так что имеем:

$$D/4 = 13^2 + 3 \cdot 64 = 169 + 192 = 361 = 19^2,$$

откуда

$$x = \frac{-13 \pm 19}{3}; \quad x_1 = 2, \quad x_2 = -\frac{32}{3}.$$

Вычисления по формуле (4) были бы сложнее, в чём вы сами легко можете убедиться.

## 5 Теорема Виета

Оказывается, корни квадратного уравнения связаны с его коэффициентами весьма простыми соотношениями.

**ТЕОРЕМА ВИЕТА.** Пусть квадратное уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$  имеет корни  $x_1$  и  $x_2$  (допускается и случай  $x_1 = x_2$  при  $D = 0$ ). Тогда справедливы *формулы Виета*:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}. \quad (7)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Формулы Виета доказываются прямым вычислением с помощью формулы корней (4):

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = -\frac{b}{a}; \\ x_1 x_2 &= \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{(-b)^2 - D}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}. \end{aligned}$$

Теорему Виета можно переформулировать так: если хотя бы одна из формул Виета (7) не выполнена, то хотя бы одно из чисел  $x_1, x_2$  не является корнем уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$ .

Это удобно использовать для проверки корней, вычисленных по формулам (4) или (6). Пусть, например, требуется решить уравнение

$$3x^2 + 2x - 8 = 0.$$

Применяя стандартную процедуру, находим:

$$D/4 = 1 + 3 \cdot 8 = 25; \quad x = \frac{-1 \pm 5}{3}; \quad x_1 = \frac{4}{3}, \quad x_2 = -2.$$

После этого полезно потратить несколько секунд и проверить формулы Виета:

$$x_1 + x_2 = \frac{4}{3} - 2 = -\frac{2}{3},$$

что как раз и равно  $-b/a$ ; также

$$x_1 x_2 = \frac{4}{3} \cdot (-2) = -\frac{8}{3},$$

что как раз и равно  $c/a$ . А вот если бы одна из формул Виета дала неверный результат, то это означало бы, что при вычислении корней где-то допущена ошибка.

Возьмите за правило каждый раз делать в уме такую проверку — это очень полезная привычка. Часто бывает так, что квадратное уравнение является звеном решения более сложной задачи, и ошибка при нахождении корней автоматически делает неверным всё дальнейшее решение. Теорема Виета в таких ситуациях — важная промежуточная страховка.

Однако формулы Виета годятся не только в качестве теста на отсутствие вычислительной ошибки — сфера их применения гораздо шире. В частности, с помощью формул Виета можно искать корни!

**ОБРАТНАЯ ТЕОРЕМА ВИЕТА.** Пусть числа  $a, b, c, x_1$  и  $x_2$  связаны соотношениями

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Тогда  $x_1$  и  $x_2$  — корни квадратного уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Выразим  $x_2$  из первой формулы Виета:

$$x_2 = -\frac{b}{a} - x_1,$$

и подставим во вторую:

$$x_1 \left( -\frac{b}{a} - x_1 \right) = \frac{c}{a} \Leftrightarrow x_1^2 + \frac{b}{a}x_1 + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow ax_1^2 + bx_1 + c = 0.$$

Как видим,  $x_1$  является корнем уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$ . То же самое верно и для  $x_2$  (это очевидно и без вычислений, поскольку  $x_1$  и  $x_2$  входят в формулы Виета симметрично).

**ЗАДАЧА 7.** Решить уравнение  $x^2 - 35x + 124 = 0$ .

**РЕШЕНИЕ.** Давайте попробуем найти два числа, сумма которых равна 35, а произведение равно 124. Вот они: 31 и 4. В силу обратной теоремы Виета это и есть корни данного уравнения.

**ЗАДАЧА 8.** Решить уравнение  $x^2 + 2013x - 2014 = 0$ .

**РЕШЕНИЕ.** Вычислять здесь дискриминант и пользоваться формулой корней — не самое приятное занятие. Но это и не нужно. Легко видеть, что  $x_1 = 1$  является корнем данного уравнения. Тогда второй корень находится из формул Виета:  $x_2 = -2014$ .

К сожалению, подбор корней с помощью формул Виета проходит лишь тогда, когда корни «хорошие» (то есть когда дискриминант является точным квадратом). Например, найти подбором корни уравнения  $x^2 + 7x + 3 = 0$  почти нереально, так как они иррациональны ( $D = 37$ ). А в случае уравнения  $x^2 + 7x + 13 = 0$  корни можно подбирать до бесконечности — их вообще нет (дискриминант отрицателен).

Рассмотрим ещё несколько задач на теорему Виета.

**ЗАДАЧА 9.** Не решая уравнения  $2x^2 - 7x + 4 = 0$ , найти сумму квадратов его корней.

**РЕШЕНИЕ.** Дискриминант равен 17, так что корни  $x_1$  и  $x_2$  существуют. Имеем:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{4}{2} = \frac{33}{4}.$$

**ЗАДАЧА 10.** Пусть  $x_1$  и  $x_2$  — корни уравнения  $x^2 + 3x - 5 = 0$ . Составьте квадратное уравнение, корни которого равны  $1/x_1$  и  $1/x_2$ .

**РЕШЕНИЕ.** Обозначим  $t_1 = 1/x_1$  и  $t_2 = 1/x_2$ . Имеем:

$$t_1 + t_2 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}; \quad t_1t_2 = \frac{1}{x_1x_2} = -\frac{1}{5}.$$

Следовательно, искомое квадратное уравнение имеет вид

$$0 = t^2 - (t_1 + t_2)t + t_1t_2 = t^2 - \frac{3}{5}t - \frac{1}{5}$$

или, домножая на 5,

$$5t^2 - 3t - 1 = 0.$$

**ЗАДАЧА 11.** (МГУ, мехмат, 2007) Графики двух функций

$$f(x) = 2x^2 + 2x - 3 \quad \text{и} \quad g(x) = -3x^2 - 2x + 1$$

пересекаются в двух точках. Найдите коэффициенты  $a$  и  $b$  в уравнении прямой  $y = ax + b$ , проходящей через те же точки.

**РЕШЕНИЕ.** Абсциссы точек пересечения удовлетворяют уравнению  $f(x) = g(x)$ , то есть

$$2x^2 + 2x - 3 = -3x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow 5x^2 + 4x - 4 = 0. \quad (8)$$

Дискриминант квадратного уравнения (8) положителен, поэтому оно имеет два различных корня  $x_1$  и  $x_2$  (что, собственно, и сказано в условии). Оба они иррациональны, и вычисление координат точек пересечения с последующим нахождением уравнения прямой, проходящей через эти точки, приведёт к громоздким вычислениям.

Будем действовать по-другому. В силу теоремы Виета

$$x_1 + x_2 = -\frac{4}{5}, \quad x_1x_2 = -\frac{4}{5}.$$

Теперь учтём, что через точки пересечения, имеющие координаты  $(x_1, f(x_1))$  и  $(x_2, f(x_2))$ , проходит прямая  $y = ax + b$ :

$$\begin{cases} 2x_1^2 + 2x_1 - 3 = ax_1 + b, \\ 2x_2^2 + 2x_2 - 3 = ax_2 + b. \end{cases} \quad (9)$$

Вычтем из первого уравнения системы (9) второе:

$$2(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + 2(x_1 - x_2) = a(x_1 - x_2);$$

сокращая полученное равенство на ненулевое число  $x_1 - x_2$ , получим

$$a = 2(x_1 + x_2) + 2 = 2 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) + 2 = \frac{2}{5}.$$

Подставим найденное значение  $a$  в систему (9) и сложим уравнения друг с другом:

$$2(x_1^2 + x_2^2) + 2(x_1 + x_2) - 6 = \frac{2}{5}(x_1 + x_2) + 2b,$$

откуда

$$\begin{aligned} b &= x_1^2 + x_2^2 + \frac{4}{5}(x_1 + x_2) - 3 = \\ &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + \frac{4}{5}(x_1 + x_2) - 3 = \frac{16}{25} - 2 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) - \frac{16}{25} - 3 = -\frac{7}{5}. \end{aligned}$$

ОТВЕТ:  $a = \frac{2}{5}$ ,  $b = -\frac{7}{5}$ .

ЗАДАЧА 12. («Высшая проба», 2014, 10) Пусть  $x_1, x_2, x_3, x_4$  — различные корни уравнения

$$x^4 - 2^{121}x^2 + 121 = 0,$$

идущие в порядке возрастания, т. е.  $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ . Найдите значение выражения

$$-\frac{(11 + x_1)(11 + x_3)}{(1 + x_2)(1 + x_4)}.$$

РЕШЕНИЕ. Заменой  $t = x^2$  уравнение приводится к квадратному:

$$t^2 - 2^{121}t + 121 = 0 \tag{10}$$

Дискриминант уравнения (10) положителен, поэтому оно имеет два различных корня  $t_1$  и  $t_2$ . Из равенств  $t_1 + t_2 = 2^{121}$ ,  $t_1t_2 = 121$  следует, что оба этих корня положительны. Пусть для определённости  $t_1 < t_2$ . Тогда

$$x_1 = -\sqrt{t_2}, \quad x_2 = -\sqrt{t_1}, \quad x_3 = \sqrt{t_1}, \quad x_4 = \sqrt{t_2}.$$

Заметим, что

$$x_1x_3 = x_2x_4 = -\sqrt{t_1t_2} = -11.$$

Кроме того, обозначим

$$k = \sqrt{t_2} - \sqrt{t_1} = x_2 + x_4 = -(x_1 + x_3).$$

Теперь имеем:

$$-\frac{(11 + x_1)(11 + x_3)}{(1 + x_2)(1 + x_4)} = -\frac{121 + 11(x_1 + x_3) + x_1x_3}{1 + x_2 + x_4 + x_2x_4} = -\frac{121 - 11k - 11}{1 + k - 11} = \frac{11k - 110}{k - 10} = 11.$$

ОТВЕТ: 11.

## 6 Разложение квадратного трёхчлена на множители

Корни квадратного уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$  называются также *корнями квадратного трёхчлена*  $ax^2 + bx + c$ . Зная корни квадратного трёхчлена, можно разложить его на множители.

**ТЕОРЕМА.** Пусть  $x_1$  и  $x_2$  — корни квадратного трёхчлена  $ax^2 + bx + c$ . Тогда имеет место разложение на множители:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2). \quad (11)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Докажем формулу (11) «справа налево» — раскроем в правой части скобки и применим теорему Виета:

$$a(x - x_1)(x - x_2) = a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2) = a\left(x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a}\right) = ax^2 + bx + c,$$

что и требовалось.

**ЗАДАЧА 13.** Разложить на множители квадратный трёхчлен  $2x^2 + 3x - 2$ .

**РЕШЕНИЕ.** Находим корни уравнения  $2x^2 + 3x - 2 = 0$ :  $x_1 = -2$  и  $x_2 = 1/2$ . По формуле (11) имеем:

$$2x^2 + 3x - 2 = 2(x + 2)\left(x - \frac{1}{2}\right) = (x + 2)(2x - 1).$$

## 7 Задачи

**1.** Решите квадратное уравнение с помощью выделения полного квадрата. Корни проверьте по формулам Виета.

а)  $x^2 - 6x + 8 = 0$ ;

б)  $x^2 + 9x + 14 = 0$ ;

в)  $2x^2 - 7x - 15 = 0$ ;

г)  $3x^2 - 8x - 4 = 0$ .

**2.** Решите квадратное уравнение с помощью упрощённой формулы корней ( $b = 2k$ ). Корни проверьте по формулам Виета.

а)  $x^2 + 2x - 3 = 0$ ;

б)  $x^2 + 6x + 2 = 0$ ;

в)  $3x^2 - 8x + 4 = 0$ ;

г)  $5x^2 + 4x - 1 = 0$ .

**3.** Найдите корни уравнения подбором с помощью формул Виета.

а)  $x^2 - 5x + 4 = 0$ ;

б)  $x^2 - 7x - 8 = 0$ ;

в)  $x^2 - 15x + 50 = 0$ ;

г)  $x^2 + 2x - 48 = 0$ .

**4.** Решите уравнение:

а)  $x^2 - 2014x - 2015 = 0$ ;

б)  $47x^2 - 153x + 106 = 0$ ;

в)  $x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = 0$ ;

г)  $x^2 + \pi x - 6\pi^2 = 0$ .

5. (Всеросс., 2016, ШЭ, 10) Даны два уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$  и  $cx^2 + bx + a = 0$ , в которых все коэффициенты ненулевые. Оказалось, что они имеют общий корень. Верно ли, что  $a = c$ ?

6. (Всеросс., 2016, ШЭ, 11) Учительница Мария Ивановна готовит задания для урока математики. Она хочет в уравнении

$$\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b} = \frac{1}{c}$$

вместо  $a$ ,  $b$  и  $c$  поставить три различных натуральных числа, чтобы корни уравнения были целыми числами. Помогите ей: подберите такие числа и решите уравнение.

7. (МГУ, геологич. ф-т, 1997) Сколько решений имеет уравнение

$$\sqrt{5}(x^2 + 2) - 2x\sqrt{7} = \sqrt[4]{21}(x^2 - 2) - 2x\sqrt{3}?$$

онгО

8. (ММО, 2009, 8.3) Известно, что квадратные уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$  и  $bx^2 + cx + a = 0$  ( $a$ ,  $b$  и  $c$  — отличные от нуля числа) имеют общий корень. Найдите его.

9. (ММО, 2004, 8.1) У квадратного уравнения  $x^2 + px + q = 0$  коэффициенты  $p$  и  $q$  увеличили на единицу. Эту операцию повторили четыре раза. Приведите пример такого исходного уравнения, что у каждого из пяти полученных уравнений корни были бы целыми числами.

10. (ММО, 2004, 9.2) У квадратного уравнения  $x^2 + px + q = 0$  коэффициенты  $p$  и  $q$  увеличили на единицу. Эту операцию повторили девять раз. Могло ли оказаться, что у каждого из десяти полученных уравнений корни — целые числа?

11. («Физтех», 2013, 9) Пусть  $x_1$  и  $x_2$  — корни уравнения  $x^2 - 2x - 6 = 0$ . Найдите  $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$ .

21-

12. Не вычисляя корней  $x_1$  и  $x_2$  уравнения  $x^2 + 2x - 5 = 0$ , найдите:

а)  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ ;      б)  $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$ ;      в)  $x_1^3 + x_2^3$ ;      г)  $x_1^4 + x_2^4$ ;      д)  $|x_1 - x_2|$ .

9^2 (т : 9т1 (т : 88- (т :  $\frac{6}{11}$  - (9 :  $\frac{6}{7}$  (в

13. Не вычисляя корней уравнения  $2x^2 - 5x - 1 = 0$ , найдите (положительную) разность квадратов его корней.

$\frac{4}{33\sqrt{5}}$

14. (МГУ, экономич. ф-т, 2003) Про числа  $x$  и  $y$  известно, что  $x + y = 18$ ,  $xy = 3$ . Вычислите значение выражения

$$\frac{1}{x^2|x|} + \frac{1}{y^3}.$$

212



15. Пусть  $x_1$  и  $x_2$  — корни уравнения  $3x^2 - x - 7 = 0$ . Составьте квадратное уравнение, корни которого равны:

а)  $x_1 + 2$  и  $x_2 + 2$ ;

б)  $\frac{1}{x_1^2}$  и  $\frac{1}{x_2^2}$ .

$0 = 6 + 787 - 767 (9) 0 = 7 + 781 - 78 (8)$

16. Коэффициенты уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$  связаны соотношением  $2b^2 - 9ac = 0$ . Докажите, что один корень этого уравнения в два раза больше другого.

17. Пусть  $x_1, x_2$  — корни квадратного уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$  и  $S_k = x_1^k + x_2^k$  ( $k \geq 0$ ). Докажите, что при  $n \geq 2$  справедлива формула

$$aS_n + bS_{n-1} + cS_{n-2} = 0.$$

18. («Физтех», 2013, 9–11) Пусть  $x_1$  и  $x_2$  — корни уравнения  $2x^2 - 7x + 1 = 0$ . Известно, что уравнение  $x^2 + px + q = 0$  имеет корни  $x_1/x_2^2$  и  $x_2/x_1^2$ . Найдите  $p$ .

$5-150$

19. («Физтех», 2017, 9) Известно, что одним из корней уравнения

$$x^2 - 4a^2b^2x = 4$$

является  $x_1 = (a^2 + b^2)^2$ . Найдите  $a^4 - b^4$ .

$77$

20. («Покори Воробьёвы горы!», 2015, 9) Найдите  $q$ , при котором уравнение

$$x^2 + x + q = 0$$

имеет два различных действительных корня  $x_1$  и  $x_2$ , удовлетворяющих соотношению

$$x_1^4 + 2x_1x_2^2 - x_2 = 19.$$

$8-$

21. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 9) Пусть  $x_1, x_2$  — корни уравнения  $x^2 - x - 3 = 0$ . Найдите

$$(x_1^5 - 20)(3x_2^4 - 2x_2 - 35).$$

$901-$

22. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 9) Пусть  $x_1, x_2$  — корни уравнения  $x^2 - x - 4 = 0$ . Найдите

$$(x_1^5 - 20x_1)(x_2^4 + 16).$$

$971$

23. (МГУ, геологич. ф-т, 1999) Известно, что  $x_1, x_2$  — корни уравнения

$$2x^2 + (1 - 3\sqrt{2})x - \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = 0.$$

Найти значение  $A = x_1 + 3x_1x_2 + x_2$  и выяснить, какое из чисел больше:  $A$  или  $-1,999$ .

666'1- > z- = v

24. (МГУ, филологич. ф-т, 2005) Найдите площадь круга, описанного около прямоугольного треугольника, катеты которого являются корнями уравнения  $x^2 - 4x + 2 = 0$ .

xg

25. (МГУ, географич. ф-т, 2002) Найти два различных корня  $x_{1,2}$  уравнения

$$x^2 - 6px + q = 0,$$

если  $p, x_1, x_2, q$  — геометрическая прогрессия.

p = zx 'z = 1x или 6 = zx 'g- = 1x

26. (МГУ, мехмат, 2007) Графики двух функций  $f(x) = 2x^2 - 2x - 1$  и  $g(x) = -5x^2 + 2x + 3$  пересекаются в двух точках. Найдите коэффициенты  $a$  и  $b$  в уравнении прямой  $y = ax + b$ , проходящей через те же точки.

$\frac{z}{1} = q, \frac{z}{9} = v$

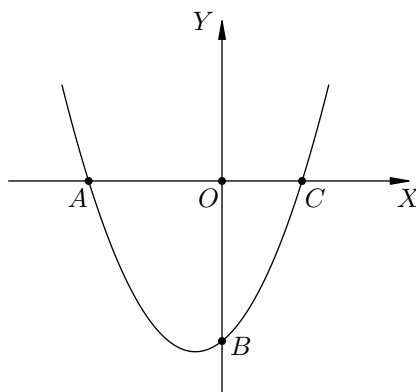
27. (Турнир им. Ломоносова, 2003) Известно, что корни уравнения  $x^2 + px + q = 0$  — целые числа, а  $p$  и  $q$  — простые числа. Найдите  $p$  и  $q$ .

z = b 'g = d

28. (Турнир им. Ломоносова, 2008) Существуют ли такие три числа, что если их поставить в одном порядке в качестве коэффициентов квадратного трёхчлена, то он имеет два положительных корня, а если в другом — два отрицательных?

Нет

29. (Всеросс., 2014, МЭ, 9) На рисунке изображён график функции  $y = x^2 + ax + b$ . Известно, что прямая  $AB$  перпендикулярна прямой  $y = x$ . Найдите длину отрезка  $OC$ .



1

**30.** (ММО, 2006, окружной тур, 10) Даны квадратные трёхчлены  $f$  и  $g$  с одинаковыми старшими коэффициентами. Известно, что сумма четырёх корней этих трёхчленов равна  $p$ . Найдите сумму корней трёхчлена  $f + g$ , если известно, что он имеет два корня.

7/d

**31.** («Высшая проба», 2014, 9) Пусть  $x_1, x_2, x_3, x_4$  — различные корни уравнения

$$x^4 - 2^{2013}x^2 + 49 = 0,$$

идущие в порядке возрастания, т. е.  $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ . Найдите значение выражения

$$\frac{(7 + x_1)(7 + x_3)}{(1 + x_2)(1 + x_4)}.$$

2

**32.** («Высшая проба», 2014, 9) Даны два уравнения:

$$x^6 + px^3 + q = 0 \quad \text{и} \quad x^2 + 5x - 10^{2013} = 0.$$

Известно, что оба корня второго уравнения являются также корнями первого. Найти последние три цифры в десятичной записи числа  $p$ . (Если  $p$  не целое, найдите три цифры перед запятой.)

125

**33.** (Всеросс., 2012, МЭ, 10) Прямая пересекает график функции  $y = x^2$  в точках с абсциссами  $x_1$  и  $x_2$ , а ось абсцисс — в точке с абсциссой  $x_3$ . Докажите, что  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_3}$ .

**34.** (Всеросс., 2018, МЭ, 11.1) Графики функций  $y = ax^2$ ,  $y = bx$  и  $y = c$  пересекаются в точке, расположенной выше оси абсцисс. Определите, сколько корней может иметь уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$ .

**35.** (ММО, 2016, 9.3) Васе задали на дом уравнение  $x^2 + p_1x + q_1 = 0$ , где  $p_1$  и  $q_1$  — целые числа. Он нашел его корни  $p_2$  и  $q_2$  и написал новое уравнение  $x^2 + p_2x + q_2 = 0$ . Повторив операцию еще трижды, Вася заметил, что он решал четыре квадратных уравнения и каждое имело два различных целых корня (если из двух возможных уравнений два различных корня имело ровно одно, то Вася всегда выбирал его, а если оба — любое). Однако, как ни старался Вася, у него не получилось составить пятое уравнение так, чтобы оно имело два различных вещественных корня, и Вася сильно расстроился. Какое уравнение Васе задали на дом?

**36.** (Всеросс., 2007, финал, 8.1) Даны числа  $a, b, c$ . Докажите, что хотя бы одно из уравнений

$$x^2 + (a - b)x + (b - c) = 0, \quad x^2 + (b - c)x + (c - a) = 0, \quad x^2 + (c - a)x + (a - b) = 0$$

имеет решение.

**37.** (*Всеросс., 2013, финал, 9.1, 10.1*) Даны различные действительные числа  $a, b, c$ . Докажите, что хотя бы два из уравнений

$$(x - a)(x - b) = x - c, \quad (x - b)(x - c) = x - a, \quad (x - c)(x - a) = x - b$$

имеют решение.