

Квадратные уравнения

Содержание

1	Неполные квадратные уравнения	1
2	Выделение полного квадрата	1
3	Формула корней	2
4	Упрощённая формула корней при чётном b	3
5	Теорема Виета	4
6	Разложение квадратного трёхчлена на множители	7
7	Задачи	8

В данной статье мы разберём основные вопросы, связанные с квадратным уравнением: выведем формулу корней, докажем теорему Виета и научимся раскладывать квадратный трёхчлен на множители.

Квадратное уравнение — это уравнение вида

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0. \quad (1)$$

Числа a , b и c называются *коэффициентами* уравнения (1). Выражение $ax^2 + bx + c$, в котором $a \neq 0$, называется *квадратным трёхчленом*.

1 Неполные квадратные уравнения

Квадратное уравнение (1) называется *неполным*, если $b = 0$ или $c = 0$. В этих тривиальных случаях совершенно ясно, как надо действовать.

ЗАДАЧА 1. Решить уравнение $2x^2 - 5 = 0$.

РЕШЕНИЕ. Имеем:

$$2x^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}.$$

ЗАДАЧА 2. Решить уравнение $x^2 + 3x = 0$.

РЕШЕНИЕ. Имеем:

$$x(x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = -3. \end{cases}$$

2 Выделение полного квадрата

Любое квадратное уравнение можно решить, не помня формулу корней. Для этого нужно выделить полный квадрат.

ЗАДАЧА 3. Решить уравнение $x^2 + 4x - 5 = 0$.

РЕШЕНИЕ. Прибавим к обеим частям по 9:

$$x^2 + 4x + 4 = 9 \Leftrightarrow (x + 2)^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = 3, \\ x + 2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x = -5. \end{cases}$$

ЗАДАЧА 4. Решить уравнение $2x^2 - 9x + 3 = 0$.

РЕШЕНИЕ. Умножим обе части уравнения на 2:

$$\begin{aligned} 4x^2 - 18x = -6 &\Leftrightarrow (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot \frac{9}{2} + \left(\frac{9}{2}\right)^2 = \frac{81}{4} - 6 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(2x - \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{57}{4} \Leftrightarrow 2x - \frac{9}{2} = \pm \frac{\sqrt{57}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{57}}{4}. \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 5. Решить уравнение $x^2 + 5x + 7 = 0$.

РЕШЕНИЕ. Имеем:

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{5}{2} + \frac{25}{4} = \frac{25}{4} - 7 \Leftrightarrow \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4}.$$

Решений нет.

3 Формула корней

Процедуру выделения полного квадрата можно применить к уравнению (1) в общем случае. Именно так получается хорошо известная вам формула вычисления корней квадратного уравнения. Имеем:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 &\Leftrightarrow a^2x^2 + abx + ac = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (ax)^2 + 2ax \cdot \frac{b}{2} + \frac{b^2}{4} = \frac{b^2}{4} - ac \Leftrightarrow \left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4}. \end{aligned}$$

Величина $D = b^2 - 4ac$ называется *дискриминантом* уравнения (1). Таким образом,

$$\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{D}{4}. \quad (2)$$

В зависимости от значения дискриминанта возможны три случая.

1. $D < 0$. Тогда уравнение (2) не имеет корней. Следовательно, не имеет корней и равносильное ему уравнение (1).
2. $D = 0$. Тогда уравнение (2) — а значит, и уравнение (1) — имеет единственный корень:

$$\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow ax + \frac{b}{2} = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = -\frac{b}{2a}}. \quad (3)$$

3. $D > 0$. Тогда уравнение (2) — а значит, и уравнение (1) — имеет два различных корня:

$$ax + \frac{b}{2} = \pm \frac{\sqrt{D}}{2} \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}}. \quad (4)$$

Формула (4) как раз и есть формула корней квадратного уравнения (1). Легко видеть, что формула (3) является её частным случаем при $D = 0$.

ЗАДАЧА 6. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11) Определите, сколько существует различных значений a , при которых уравнение

$$(1 - a^2)x^2 + ax + 1 = 0$$

имеет единственное решение.

РЕШЕНИЕ. Эта простая задача отборочного тура содержит маленький подвох: надо не забыть рассмотреть отдельно значения $a = \pm 1$, при которых уравнение окажется не квадратным, а линейным. Так, при $a = 1$ уравнение принимает вид $x + 1 = 0$ и имеет единственный корень $x = -1$; аналогично, при $a = -1$ уравнение имеет единственный корень $x = 1$.

Если же $a \neq \pm 1$, то наше уравнение — квадратное с дискриминантом

$$D = a^2 - 4(1 - a^2) = 5a^2 - 4.$$

Корень будет единственным в том и только в том случае, если $D = 0$, то есть при $a = \pm 2/\sqrt{5}$. Всего, стало быть, получается четыре значения a .

ОТВЕТ: Четыре.

ЗАДАЧА 7. (ОММО, 2013) При каких значениях параметра a уравнение $2x^4 + 9ax + 7a^2 = 0$ имеет хотя бы один целый корень?

РЕШЕНИЕ. Ключевая идея здесь состоит в том, чтобы поменять ролями буквы x и a : переменную x сделать параметром, а параметр a — переменной. Тогда уравнение получается квадратным относительно a , и вопрос формулируется так: определить, при каких целых значениях параметра x уравнение

$$7a^2 + 9ax + 2x^4 = 0 \tag{5}$$

имеет корни, и найти эти корни. Вычисляем дискриминант:

$$D = 81x^2 - 4 \cdot 7 \cdot 2x^4 = x^2(81 - 56x^2).$$

Как видим, дискриминант неотрицателен лишь при трёх целочисленных значениях x , равных 0 и ± 1 . Если $x = 0$, то уравнение (5) даёт $a = 0$. Если $x = 1$, то получаем уравнение $7a^2 + 9a + 2 = 0$, откуда $a = -1$ или $a = -2/7$. Наконец, если $x = -1$, то уравнение (5) принимает вид $7a^2 - 9a + 2 = 0$, откуда $a = 1$ или $a = 2/7$.

ОТВЕТ: 0; ± 1 ; $\pm \frac{2}{7}$.

4 Упрощённая формула корней при чётном b

При $b = 2k$ возникает полезная модификация формулы (4). Рассмотрим уравнение

$$ax^2 + 2kx + c = 0. \tag{6}$$

Его дискриминант:

$$D = 4k^2 - 4ac = 4(k^2 - ac).$$

Тогда формула (4) даёт:

$$x = \frac{-2k \pm \sqrt{4(k^2 - ac)}}{2a} = \frac{-2k \pm 2\sqrt{k^2 - ac}}{2a} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}.$$

Это и есть формула для корней уравнения (6). Учитывая ещё, что $k^2 - ac = D/4$, запишем эту формулу в виде:

$$\boxed{x = \frac{-k \pm \sqrt{D/4}}{a}}. \tag{7}$$

Знать эту формулу очень рекомендуется — она поможет вам сэкономить драгоценное время на экзамене.

ЗАДАЧА 8. Решить уравнение $3x^2 + 26x - 64 = 0$.

РЕШЕНИЕ. Здесь $k = 13$, так что имеем:

$$D/4 = 13^2 + 3 \cdot 64 = 169 + 192 = 361 = 19^2,$$

откуда

$$x = \frac{-13 \pm 19}{3}; \quad x_1 = 2, \quad x_2 = -\frac{32}{3}.$$

Вычисления по формуле (4) были бы сложнее, в чём вы сами легко можете убедиться.

5 Теорема Виета

Оказывается, корни квадратного уравнения связаны с его коэффициентами весьма простыми соотношениями.

ТЕОРЕМА ВИЕТА. Пусть квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет корни x_1 и x_2 (допускается и случай $x_1 = x_2$ при $D = 0$). Тогда справедливы *формулы Виета*:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формулы Виета доказываются прямым вычислением с помощью формулы корней (4):

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = -\frac{b}{a}; \\ x_1 x_2 &= \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{(-b)^2 - D}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}. \end{aligned}$$

Теорему Виета можно переформулировать так: если хотя бы одна из формул Виета (8) не выполнена, то хотя бы одно из чисел x_1, x_2 не является корнем уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. Это удобно использовать для проверки корней, вычисленных по формулам (4) или (7). Пусть, например, требуется решить уравнение

$$3x^2 + 2x - 8 = 0.$$

Применяя стандартную процедуру, находим:

$$D/4 = 1 + 3 \cdot 8 = 25; \quad x = \frac{-1 \pm 5}{3}; \quad x_1 = \frac{4}{3}, \quad x_2 = -2.$$

После этого полезно потратить несколько секунд и проверить формулы Виета:

$$x_1 + x_2 = \frac{4}{3} - 2 = -\frac{2}{3},$$

что как раз и равно $-b/a$; также

$$x_1 x_2 = \frac{4}{3} \cdot (-2) = -\frac{8}{3},$$

что как раз и равно c/a . А вот если бы одна из формул Виета дала неверный результат, то это означало бы, что при вычислении корней где-то допущена ошибка.

Возьмите за правило каждый раз делать в уме такую проверку — это очень полезная привычка. Часто бывает так, что квадратное уравнение является звеном решения более сложной задачи, и ошибка при нахождении корней автоматически делает неверным всё дальнейшее решение. Теорема Виета в таких ситуациях — важная промежуточная страховка.

Однако формулы Виета годятся не только в качестве теста на отсутствие вычислительной ошибки — сфера их применения гораздо шире. В частности, с помощью формул Виета можно искать корни!

ОБРАТНАЯ ТЕОРЕМА ВИЕТА. Пусть числа a, b, c, x_1 и x_2 связаны соотношениями

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Тогда x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выразим x_2 из первой формулы Виета:

$$x_2 = -\frac{b}{a} - x_1,$$

и подставим во вторую:

$$x_1 \left(-\frac{b}{a} - x_1 \right) = \frac{c}{a} \Leftrightarrow x_1^2 + \frac{b}{a}x_1 + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow ax_1^2 + bx_1 + c = 0.$$

Как видим, x_1 является корнем уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. То же самое верно и для x_2 (это очевидно и без вычислений, поскольку x_1 и x_2 входят в формулы Виета симметрично).

ЗАДАЧА 9. Решить уравнение $x^2 - 35x + 124 = 0$.

РЕШЕНИЕ. Давайте попробуем найти два числа, сумма которых равна 35, а произведение равно 124. Вот они: 31 и 4. В силу обратной теоремы Виета это и есть корни данного уравнения.

ЗАДАЧА 10. Решить уравнение $x^2 + 2013x - 2014 = 0$.

РЕШЕНИЕ. Вычислять здесь дискриминант и пользоваться формулой корней — не самое приятное занятие. Но это и не нужно. Легко видеть, что $x_1 = 1$ является корнем данного уравнения. Тогда второй корень находится из формул Виета: $x_2 = -2014$.

К сожалению, подбор корней с помощью формул Виета проходит лишь тогда, когда корни «хорошие» (то есть когда дискриминант является точным квадратом). Например, найти подбором корни уравнения $x^2 + 7x + 3 = 0$ почти нереально, так как они иррациональны ($D = 37$). А в случае уравнения $x^2 + 7x + 13 = 0$ корни можно подбирать до бесконечности — их вообще нет (дискриминант отрицателен).

Рассмотрим ещё несколько задач на теорему Виета.

ЗАДАЧА 11. Не решая уравнения $2x^2 - 7x + 4 = 0$, найти сумму квадратов его корней.

РЕШЕНИЕ. Дискриминант равен 17, так что корни x_1 и x_2 существуют. Имеем:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{4}{2} = \frac{33}{4}.$$

ЗАДАЧА 12. («Физтех», 2014, 9–11) При каком значении параметра a значение выражения $x_1^2 + x_2^2$ будет наименьшим, если x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 - 2ax + 2a - 5 = 0$?

РЕШЕНИЕ. Заметим, что дискриминант

$$D/4 = a^2 - 2a + 5 = (a - 1)^2 + 4$$

положителен при всех значениях a . Значит, при любом a наше уравнение имеет два различных корня x_1 и x_2 . Как и выше, получаем:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (2a)^2 - 2(2a - 5) = 4a^2 - 4a + 10 = (2a - 1)^2 + 9.$$

Полученное выражение не меньше 9; оно равно 9 только при $a = 1/2$.

ОТВЕТ: $a = 1/2$.

ЗАДАЧА 13. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + 3x - 5 = 0$. Составьте квадратное уравнение, корни которого равны $1/x_1$ и $1/x_2$.

РЕШЕНИЕ. Обозначим $t_1 = 1/x_1$ и $t_2 = 1/x_2$. Имеем:

$$t_1 + t_2 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}; \quad t_1t_2 = \frac{1}{x_1x_2} = -\frac{1}{5}.$$

Следовательно, искомое квадратное уравнение имеет вид

$$0 = t^2 - (t_1 + t_2)t + t_1t_2 = t^2 - \frac{3}{5}t - \frac{1}{5}$$

или, домножая на 5,

$$5t^2 - 3t - 1 = 0.$$

ЗАДАЧА 14. (МГУ, мехмат, 2007) Графики двух функций

$$f(x) = 2x^2 + 2x - 3 \quad \text{и} \quad g(x) = -3x^2 - 2x + 1$$

пересекаются в двух точках. Найдите коэффициенты a и b в уравнении прямой $y = ax + b$, проходящей через те же точки.

РЕШЕНИЕ. Абсциссы точек пересечения удовлетворяют уравнению $f(x) = g(x)$, то есть

$$2x^2 + 2x - 3 = -3x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow 5x^2 + 4x - 4 = 0. \quad (9)$$

Дискриминант квадратного уравнения (9) положителен, поэтому оно имеет два различных корня x_1 и x_2 (что, собственно, и сказано в условии). Оба они иррациональны, и вычисление координат точек пересечения с последующим нахождением уравнения прямой, проходящей через эти точки, приведёт к громоздким вычислениям.

Будем действовать по-другому. В силу теоремы Виета

$$x_1 + x_2 = -\frac{4}{5}, \quad x_1x_2 = -\frac{4}{5}.$$

Теперь учтём, что через точки пересечения, имеющие координаты $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$, проходит прямая $y = ax + b$:

$$\begin{cases} 2x_1^2 + 2x_1 - 3 = ax_1 + b, \\ 2x_2^2 + 2x_2 - 3 = ax_2 + b. \end{cases} \quad (10)$$

Вычтем из первого уравнения системы (10) второе:

$$2(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + 2(x_1 - x_2) = a(x_1 - x_2);$$

сокращая полученное равенство на ненулевое число $x_1 - x_2$, получим

$$a = 2(x_1 + x_2) + 2 = 2 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) + 2 = \frac{2}{5}.$$

Подставим найденное значение a в систему (10) и сложим уравнения друг с другом:

$$2(x_1^2 + x_2^2) + 2(x_1 + x_2) - 6 = \frac{2}{5}(x_1 + x_2) + 2b,$$

откуда

$$\begin{aligned} b &= x_1^2 + x_2^2 + \frac{4}{5}(x_1 + x_2) - 3 = \\ &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + \frac{4}{5}(x_1 + x_2) - 3 = \frac{16}{25} - 2 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) - \frac{16}{25} - 3 = -\frac{7}{5}. \end{aligned}$$

ОТВЕТ: $a = \frac{2}{5}$, $b = -\frac{7}{5}$.

ЗАДАЧА 15. («Высшая проба», 2014, 10) Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 — различные корни уравнения

$$x^4 - 2^{121}x^2 + 121 = 0,$$

идущие в порядке возрастания, т. е. $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. Найдите значение выражения

$$-\frac{(11 + x_1)(11 + x_3)}{(1 + x_2)(1 + x_4)}.$$

РЕШЕНИЕ. Заменой $t = x^2$ уравнение приводится к квадратному:

$$t^2 - 2^{121}t + 121 = 0 \tag{11}$$

Дискриминант уравнения (11) положителен, поэтому оно имеет два различных корня t_1 и t_2 . Из равенств $t_1 + t_2 = 2^{121}$, $t_1t_2 = 121$ следует, что оба этих корня положительны. Пусть для определённости $t_1 < t_2$. Тогда

$$x_1 = -\sqrt{t_2}, \quad x_2 = -\sqrt{t_1}, \quad x_3 = \sqrt{t_1}, \quad x_4 = \sqrt{t_2}.$$

Заметим, что

$$x_1x_3 = x_2x_4 = -\sqrt{t_1t_2} = -11.$$

Кроме того, обозначим

$$k = \sqrt{t_2} - \sqrt{t_1} = x_2 + x_4 = -(x_1 + x_3).$$

Теперь имеем:

$$-\frac{(11 + x_1)(11 + x_3)}{(1 + x_2)(1 + x_4)} = -\frac{121 + 11(x_1 + x_3) + x_1x_3}{1 + x_2 + x_4 + x_2x_4} = -\frac{121 - 11k - 11}{1 + k - 11} = \frac{11k - 110}{k - 10} = 11.$$

ОТВЕТ: 11.

6 Разложение квадратного трёхчлена на множители

Корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ называются также *корнями квадратного трёхчлена* $ax^2 + bx + c$. Зная корни квадратного трёхчлена, можно разложить его на множители.

ТЕОРЕМА. Пусть x_1 и x_2 — корни квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$. Тогда имеет место разложение на множители:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2). \tag{12}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем формулу (12) «справа налево» — раскроем в правой части скобки и применим теорему Виета:

$$a(x - x_1)(x - x_2) = a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2) = a\left(x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a}\right) = ax^2 + bx + c,$$

что и требовалось.

ЗАДАЧА 16. Разложить на множители квадратный трёхчлен $2x^2 + 3x - 2$.

РЕШЕНИЕ. Находим корни уравнения $2x^2 + 3x - 2 = 0$: $x_1 = -2$ и $x_2 = 1/2$. По формуле (12) имеем:

$$2x^2 + 3x - 2 = 2(x + 2)\left(x - \frac{1}{2}\right) = (x + 2)(2x - 1).$$

7 Задачи

1. Решите квадратное уравнение с помощью выделения полного квадрата. Корни проверьте по формулам Виета.

а) $x^2 - 6x + 8 = 0$;

б) $x^2 + 9x + 14 = 0$;

в) $2x^2 - 7x - 15 = 0$;

г) $3x^2 - 8x - 4 = 0$.

2. Решите квадратное уравнение с помощью упрощённой формулы корней ($b = 2k$). Корни проверьте по формулам Виета.

а) $x^2 + 2x - 3 = 0$;

б) $x^2 + 6x + 2 = 0$;

в) $3x^2 - 8x + 4 = 0$;

г) $5x^2 + 4x - 1 = 0$.

3. Найдите корни уравнения подбором с помощью формул Виета.

а) $x^2 - 5x + 4 = 0$;

б) $x^2 - 7x - 8 = 0$;

в) $x^2 - 15x + 50 = 0$;

г) $x^2 + 2x - 48 = 0$.

4. Решите уравнение:

а) $x^2 - 2014x - 2015 = 0$;

б) $47x^2 - 153x + 106 = 0$;

в) $x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = 0$;

г) $x^2 + \pi x - 6\pi^2 = 0$.

5. (Всеросс., 2016, I этап, 10) Даны два уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ и $cx^2 + bx + a = 0$, в которых все коэффициенты ненулевые. Оказалось, что они имеют общий корень. Верно ли, что $a = c$?

□

6. (Всеросс., 2016, I этап, 11) Учительница Мария Ивановна готовит задания для урока математики. Она хочет в уравнении

$$\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b} = \frac{1}{c}$$

вместо a , b и c поставить три различных натуральных числа, чтобы корни уравнения были целыми числами. Помогите ей: подберите такие числа и решите уравнение.

7. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11) Определите, сколько существует различных значений a , при которых уравнение

$$(a^2 - 5)x^2 - 2ax + 1 = 0$$

имеет единственное решение.

ЛвГ

8. («Ломоносов», 2015, 10–11) Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{(a-6)x^2 + 8x - 4}{x-2} = 0$$

имеет ровно один корень. В ответе укажите сумму всех таких значений a .

П

9. («Ломоносов», 2014, 10–11) Найдите сумму всех таких целых значений a , принадлежащих отрезку $[-2012; 2013]$, при которых уравнение

$$(a-1)x^2 - 2(1-a)x + \frac{a-5}{a+4} = 0$$

имеет хотя бы одно решение.

2021

10. (МГУ, геологич. ф-т, 1997) Сколько решений имеет уравнение

$$\sqrt{5}(x^2 + 2) - 2x\sqrt{7} = \sqrt[4]{21}(x^2 - 2) - 2x\sqrt{3}?$$

ОлГ

11. («Ломоносов», 2012, 9) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнения

$$x^2 + ax + 2012 = 0 \quad \text{и} \quad x^2 + 2012x + a = 0$$

имеют хотя бы один общий корень.

2012, -2013

12. (ММО, 2009, 8.3) Известно, что квадратные уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ и $bx^2 + cx + a = 0$ (a , b и c — отличные от нуля числа) имеют общий корень. Найдите его.

Г

13. (ММО, 2004, 8) У квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ коэффициенты p и q увеличили на единицу. Эту операцию повторили четыре раза. Приведите пример такого исходного уравнения, что у каждого из пяти полученных уравнений корни были бы целыми числами.

Возьмите уравнение с корнем -1 и вторым корнем

14. (ММО, 2004, 9) У квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ коэффициенты p и q увеличили на единицу. Эту операцию повторили девять раз. Могло ли оказаться, что у каждого из десяти полученных уравнений корни — целые числа?

нет

15. (ОММО, 2013) При каких значениях параметра a уравнение $2x^4 - 7ax + 5a^2 = 0$ имеет хотя бы один целый корень?

$\frac{5}{2} \mp 1; 0$

16. («Физтех», 2013, 9) Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 - 2x - 6 = 0$. Найдите $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$.

-12

17. Не вычисляя корней x_1 и x_2 уравнения $x^2 + 2x - 5 = 0$, найдите:

- а) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; б) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$; в) $x_1^3 + x_2^3$; г) $x_1^4 + x_2^4$; д) $|x_1 - x_2|$.

а) $\frac{5}{2}$; б) $\frac{5}{11}$; в) -38 ; г) 146 ; д) $2\sqrt{6}$

18. Не вычисляя корней уравнения $2x^2 - 5x - 1 = 0$, найдите (положительную) разность квадратов его корней.

$\frac{4}{33}$

19. (МГУ, экономич. ф-т, 2003) Про числа x и y известно, что $x + y = 18$, $xy = 3$. Вычислите значение выражения

$$\frac{1}{x^2|x|} + \frac{1}{y^3}.$$

210

20. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $3x^2 - x - 7 = 0$. Составьте квадратное уравнение, корни которого равны:

- а) $x_1 + 2$ и $x_2 + 2$; б) $\frac{1}{x_1^2}$ и $\frac{1}{x_2^2}$.

а) $3x^2 - 7x + 9 = 0$; б) $9x^2 - 13x + 7 = 0$

21. Коэффициенты уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ связаны соотношением $2b^2 - 9ac = 0$. Докажите, что один корень этого уравнения в два раза больше другого.

22. Пусть x_1, x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ и $S_k = x_1^k + x_2^k$ ($k \geq 0$). Докажите, что при $n \geq 2$ справедлива формула

$$aS_n + bS_{n-1} + cS_{n-2} = 0.$$

23. («Физтех», 2013, 9–11) Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $2x^2 - 7x + 1 = 0$. Известно, что уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет корни x_1/x_2^2 и x_2/x_1^2 . Найдите p .

5'09Г-

24. («Физтех», 2017, 9) Известно, что одним из корней уравнения

$$x^2 - 4a^2b^2x = 4$$

является $x_1 = (a^2 + b^2)^2$. Найдите $a^4 - b^4$.

7F

25. («Покори Воробьёвы горы!», 2015, 9) Найдите q , при котором уравнение

$$x^2 + x + q = 0$$

имеет два различных действительных корня x_1 и x_2 , удовлетворяющих соотношению

$$x_1^4 + 2x_1x_2^2 - x_2 = 19.$$

8-

26. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 9) Пусть x_1, x_2 — корни уравнения $x^2 - x - 3 = 0$. Найдите

$$(x_1^5 - 20)(3x_2^4 - 2x_2 - 35).$$

890Г-

27. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 9) Пусть x_1, x_2 — корни уравнения $x^2 - x - 4 = 0$. Найдите

$$(x_1^5 - 20x_1)(x_2^4 + 16).$$

9L

28. (МГУ, геологич. ф-т, 1999) Известно, что x_1, x_2 — корни уравнения

$$2x^2 + (1 - 3\sqrt{2})x - \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = 0.$$

Найти значение $A = x_1 + 3x_1x_2 + x_2$ и выяснить, какое из чисел больше: A или $-1,999$.

666'Г- > 2- = A

29. (МГУ, филологич. ф-т, 2005) Найдите площадь круга, описанного около прямоугольного треугольника, катеты которого являются корнями уравнения $x^2 - 4x + 2 = 0$.

78

30. (МГУ, географич. ф-т, 2002) Найти два различных корня $x_{1,2}$ уравнения

$$x^2 - 6px + q = 0,$$

если p, x_1, x_2, q — геометрическая прогрессия.

$$\boxed{p = 2x_1, q = 1x_1 \text{ или } 6 = 2x_1, q = 1x_1}$$

31. (МГУ, социологич. ф-т, 2001) Найдите все значения a , при которых уравнение

$$ax^2 + (2a + 2)x + a + 3 = 0$$

имеет два корня и расстояние между ними больше 1.

$$\boxed{(2 \wedge 2 + 2 - 0) \cap (0 \wedge 2 - 2 -)}$$

32. («Ломоносов», 2014, 10–11) Найдите наименьшее значение a , при котором сумма квадратов корней уравнения $x^2 + 3ax + a^2 = 0$ равна 2,52.

$$\boxed{9'0-}$$

33. («Физтех», 2014, 9–11) При каком значении параметра a значение выражения $x_1^2 + x_2^2$ будет наименьшим, если x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + 4ax + 4a - 3 = 0$?

$$\boxed{9'2'0}$$

34. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 9) Найдите a такое, что сумма квадратов действительных корней уравнения $x^4 + ax^2 - 2017 = 0$ равна 4.

$$\boxed{9'001}$$

35. («Ломоносов», 2014, 9) Найдите все значения a , при которых сумма модулей корней уравнения $x(x + a - 1) = a^2$ равна 2.

$$\boxed{\frac{9}{8} - 1}$$

36. («Ломоносов», 2014, 10–11) Найдите все значения a , при каждом из которых сумма модулей корней квадратного трёхчлена $x^2 + 2ax + 4a$ равна 3.

$$\boxed{\frac{7}{1}}$$

37. («Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11) Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x^2 + (2 + a)x - 6a^2 + 11a = 3$$

имеет два корня x_1 и x_2 , удовлетворяющие неравенству $\frac{2x_1}{x_2} + \frac{x_2}{2x_1} \leq 2$.

$$\boxed{(\infty + \frac{7}{8}) \cap \{1, \frac{8}{5}\} \cap (\frac{8}{1} \wedge \infty -)}$$

38. («Ломоносов», 2015, 8–9) График квадратичной функции $f(x) = x^2 + 2px - p^2 + 7p - 2015$ пересекает координатные оси в трёх точках A, B и C . Найдите значение p , при котором произведение длин отрезков $OA \cdot OB \cdot OC$ будет наименьшим.

$$\boxed{\frac{7}{2}}$$

39. (МГУ, мехмат, 2007) Графики двух функций $f(x) = 2x^2 - 2x - 1$ и $g(x) = -5x^2 + 2x + 3$ пересекаются в двух точках. Найдите коэффициенты a и b в уравнении прямой $y = ax + b$, проходящей через те же точки.

$$\frac{a}{1} = q, \frac{a}{9} = p$$

40. (Турнир им. Ломоносова, 2003) Известно, что корни уравнения $x^2 + px + q = 0$ — целые числа, а p и q — простые числа. Найдите p и q .

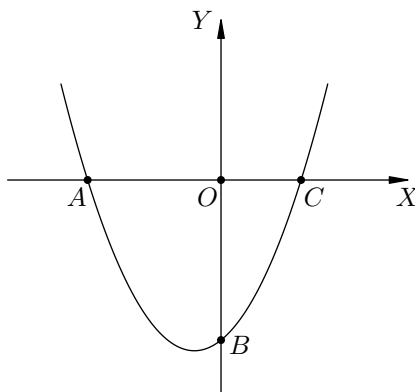
$$p = b, q = d$$

41. (Турнир им. Ломоносова, 2008) Существуют ли такие три числа, что если их поставить в одном порядке в качестве коэффициентов квадратного трёхчлена, то он имеет два положительных корня, а если в другом — два отрицательных?

нет

42. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 9) Изобразите на координатной плоскости множество таких точек (p, q) , что уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет два корня, один из которых больше 2, а другой — меньше 0.

43. (Всеросс., 2014, II этап, 9) На рисунке изображён график функции $y = x^2 + ax + b$. Известно, что прямая AB перпендикулярна прямой $y = x$. Найдите длину отрезка OC .



1

44. (ММО, 2006, окружной тур, 10) Даны квадратные трёхчлены f и g с одинаковыми старшими коэффициентами. Известно, что сумма четырёх корней этих трёхчленов равна p . Найдите сумму корней трёхчлена $f + g$, если известно, что он имеет два корня.

p/d

45. («Высшая проба», 2014, 9) Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 — различные корни уравнения

$$x^4 - 2^{2013}x^2 + 49 = 0,$$

идущие в порядке возрастания, т. е. $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. Найдите значение выражения

$$\frac{(7 + x_1)(7 + x_3)}{(1 + x_2)(1 + x_4)}.$$

2

46. («Высшая проба», 2014, 9) Даны два уравнения:

$$x^6 + px^3 + q = 0 \quad \text{и} \quad x^2 + 5x - 10^{2013} = 0.$$

Известно, что оба корня второго уравнения являются также корнями первого. Найти последние три цифры в десятичной записи числа p . (Если p не целое, найдите три цифры перед запятой.)

121

47. (Всеросс., 2012, II этап, 10) Прямая пересекает график функции $y = x^2$ в точках с абсциссами x_1 и x_2 , а ось абсцисс — в точке с абсциссой x_3 . Докажите, что $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_3}$.

48. (Всеросс., 2010, II этап, 11) При каких значениях c числа $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ могут являться корнями квадратного уравнения $5x^2 - 3x + c = 0$ (α — некоторый угол)?

5/8 = 0 и др

49. (ММО, 2016, 9) Васе задали на дом уравнение $x^2 + p_1x + q_1 = 0$, где p_1 и q_1 — целые числа. Он нашел его корни p_2 и q_2 и написал новое уравнение $x^2 + p_2x + q_2 = 0$. Повторив операцию еще трижды, Вася заметил, что он решал четыре квадратных уравнения и каждое имело два различных целых корня (если из двух возможных уравнений два различных корня имело ровно одно, то Вася всегда выбирал его, а если оба — любое). Однако, как ни старался Вася, у него не получилось составить пятое уравнение так, чтобы оно имело два различных вещественных корня, и Вася сильно расстроился. Какое уравнение Васе задали на дом?

0 = 0x - x + x^2

50. (Всеросс., 2013, финал, 9–10) Даны различные действительные числа a , b , c . Докажите, что хотя бы два из уравнений

$$(x - a)(x - b) = x - c, \quad (x - b)(x - c) = x - a, \quad (x - c)(x - a) = x - b$$

имеют решение.