

Тренировочные задачи

Суммы и произведения тригонометрических функций

1. Преобразуйте в произведение:

а) $\sin 48^\circ + \sin 32^\circ$;

б) $\sin 71^\circ - \sin 13^\circ$;

в) $\cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{2\pi}{5}$;

г) $\cos \frac{3\pi}{7} - \cos \frac{9\pi}{7}$.

$$\left(\frac{2}{3\pi} \sin \frac{2}{9} \sin \frac{2}{9} \right) \left(\frac{10}{\pi} \cos \frac{10}{3} \cos \frac{10}{3} \right) \left(\frac{2}{9} \cos 42^\circ \cos 29^\circ \right) \left(\frac{2}{8} \cos 8^\circ \cos 40^\circ \right) \left(\frac{2}{9} \sin 40^\circ \sin 2^\circ \right)$$

2. Упростите выражение:

а) $\sin 83^\circ - \sin 23^\circ$;

б) $\cos 35^\circ + \cos 25^\circ$;

в) $\sin \frac{\pi}{8} + \sin \frac{3\pi}{8}$;

г) $\cos \frac{4\pi}{15} - \cos \frac{2\pi}{5}$.

$$\left(\frac{91}{\pi} \sin \frac{9}{\pi} \sin \frac{9}{\pi} \right) \left(\frac{8}{\pi} \cos \frac{8}{\pi} \cos \frac{8}{\pi} \right) \left(\frac{9}{\pi} \cos 5^\circ \cos 5^\circ \right) \left(\frac{9}{\pi} \cos 5^\circ \cos 5^\circ \right)$$

3. Преобразуйте в произведение:

а) $\sin 3\alpha - \sin 7\alpha$;

б) $\cos 4\alpha + \cos 10\alpha$;

в) $\cos \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right) - \cos \alpha$;

г) $\sin \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) + \sin \alpha$.

$$\left(\frac{9}{\pi} \cos \frac{9}{\pi} \cos \frac{9}{\pi} \right) \left(\frac{9}{\pi} \cos \frac{9}{\pi} \cos \frac{9}{\pi} \right) \left(\frac{9}{\pi} \cos 5\alpha \cos 5\alpha \right) \left(\frac{9}{\pi} \cos 5\alpha \cos 5\alpha \right) \left(\frac{9}{\pi} \cos 5\alpha \cos 5\alpha \right)$$

4. Преобразуйте в произведение:

а) $\sin 10^\circ + \cos 70^\circ$;

б) $\cos 50^\circ - \sin 14^\circ$;

в) $\cos 40^\circ + \sin 40^\circ$;

г) $\sin 20^\circ - \cos 20^\circ$.

$$\left(\frac{2}{9} \sin 15^\circ \cos 5^\circ \right) \left(\frac{2}{9} \sin 13^\circ \cos 27^\circ \right) \left(\frac{2}{9} \cos 5^\circ \cos 5^\circ \right) \left(\frac{2}{9} \cos 5^\circ \cos 5^\circ \right) \left(\frac{2}{9} \cos 5^\circ \cos 5^\circ \right)$$

5. Докажите тождество:

а) $\frac{\sin 2\alpha + \sin 6\alpha}{\cos 2\alpha + \cos 6\alpha} = \operatorname{tg} 4\alpha$;

б) $\frac{\cos 2\alpha - \cos 4\alpha}{\cos 2\alpha + \cos 4\alpha} = \operatorname{tg} 3\alpha \operatorname{tg} \alpha$;

в) $\frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha}{\sin \alpha - \sin 2\alpha} = -\operatorname{tg} \frac{3\alpha}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$;

г) $\frac{\cos 3\alpha - \cos 7\alpha}{\sin 7\alpha - \sin 3\alpha} = \operatorname{tg} 5\alpha$.

6. Докажите тождество:

- а) $\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \sin 4\alpha = 4 \sin \frac{5\alpha}{2} \cos \alpha \cos \frac{\alpha}{2}$;
б) $\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \cos 4\alpha = 4 \cos \frac{5\alpha}{2} \cos \alpha \cos \frac{\alpha}{2}$;
в) $\cos 2\alpha - \cos 4\alpha - \cos 6\alpha + \cos 8\alpha = -4 \cos 5\alpha \sin 2\alpha \sin \alpha$.

7. Докажите тождество:

- а) $\sin \alpha + 2 \sin 3\alpha + \sin 5\alpha = 4 \sin 3\alpha \cos^2 \alpha$; б) $\sin^2 5\alpha - \sin^2 3\alpha = \sin 8\alpha \sin 2\alpha$.

8. Докажите тождество:

- а) $\frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$; б) $\frac{\sin 2\alpha + \sin 5\alpha - \sin \alpha}{\cos 2\alpha + \cos 5\alpha + \cos \alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$;
в) $\frac{\cos \alpha + 2 \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}{\sin \alpha + 2 \sin 2\alpha + \sin 3\alpha} = \operatorname{ctg} 2\alpha$; г) $\frac{\sin 4\alpha + 2 \cos 3\alpha - \sin 2\alpha}{\cos 4\alpha - 2 \sin 3\alpha - \cos 2\alpha} = -\operatorname{ctg} 3\alpha$;
д) $\frac{\cos \alpha - \cos 3\alpha + \cos 5\alpha - \cos 7\alpha}{\sin \alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha} = \operatorname{tg} \alpha$; е) $\frac{\cos \alpha - \cos 2\alpha - \cos 4\alpha + \cos 5\alpha}{\sin \alpha - \sin 2\alpha - \sin 4\alpha + \sin 5\alpha} = \operatorname{ctg} 3\alpha$.

9. Докажите равенство:

- а) $\sin 87^\circ - \sin 59^\circ - \sin 93^\circ + \sin 61^\circ = \sin 1^\circ$;
б) $\cos 115^\circ - \cos 35^\circ + \cos 65^\circ + \cos 25^\circ = \sin 5^\circ$.

10. Докажите тождество:

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} 3\alpha = -\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} 3\alpha.$$

11. Докажите тождество:

- а) $\operatorname{tg} \alpha + 2 \operatorname{ctg} 2\alpha = \operatorname{ctg} \alpha$;
б) $\operatorname{tg} \alpha + 2 \operatorname{tg} 2\alpha + 4 \operatorname{ctg} 4\alpha = \operatorname{ctg} \alpha$;
в) $\operatorname{tg} \alpha + 2 \operatorname{tg} 2\alpha + 4 \operatorname{tg} 4\alpha + 8 \operatorname{ctg} 8\alpha = \operatorname{ctg} \alpha$;
г) $\operatorname{tg} \alpha + 2 \operatorname{tg} 2\alpha + 4 \operatorname{tg} 4\alpha + 8 \operatorname{tg} 8\alpha + 16 \operatorname{ctg} 16\alpha = \operatorname{ctg} \alpha$.

12. Докажите тождество:

$$\frac{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}{2 \cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1} = 2 \cos \alpha.$$

13. Преобразуйте в сумму или разность:

а) $2 \sin 10^\circ \cos 5^\circ$;

б) $2 \sin 25^\circ \cos 55^\circ$;

в) $2 \cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5}$;

г) $2 \sin \frac{7\pi}{18} \sin \frac{2\pi}{9}$.

$$\frac{81}{\pi^2} \cos - \frac{7}{\pi^2} (\alpha : \frac{9}{\pi} \cos + \frac{9}{\pi^2} \cos (\alpha : \frac{7}{\pi} - \cos \pi) (9 : \cos \pi + \cos \pi) (\pi$$

14. Преобразуйте в сумму или разность:

а) $\sin 2\alpha \cos 5\alpha$;

б) $\cos \beta \cos 3\beta$;

в) $\sin 6\gamma \cos \gamma$;

г) $\sin 3\varphi \sin 11\varphi$.

$$(\cos \pi - \cos \pi) \frac{7}{\pi} (\alpha : (\cos \pi + \cos \pi) \frac{7}{\pi} (\alpha : (\cos \pi + \cos \pi) \frac{7}{\pi} (9 : (\cos \pi - \cos \pi) \frac{7}{\pi} (\pi$$

15. Проверьте равенство:

а) $\sin 2x \cos 3x + \sin 4x \cos 9x = \sin 6x \cos 7x$;

б) $\sin 3x \sin x + \sin 4x \sin 8x = \sin 7x \sin 5x$;

в) $\cos 3x \cos 6x - \cos 4x \cos 7x = \sin 10x \sin x$;

г) $\sin 4x \cos x - \sin 5x \cos 2x = -\sin x \cos 6x$.