

Тренировочные задачи

Тригонометрические уравнения. 2

Во всех ответах предполагается, что $n \in \mathbb{Z}$.

1. Решите уравнение:

а) $\cos x + \sin x = 1$;

б) $\cos x - \sqrt{3} \sin x = 2$;

в) $\sin x - \cos x = \sqrt{2}$;

г) $\sqrt{3} \cos x + \sin x = \sqrt{2}$.

$$\boxed{\text{в) } \sin x - \cos x = \sqrt{2} \text{ ; г) } \sqrt{3} \cos x + \sin x = \sqrt{2} \text{ ; б) } \cos x - \sqrt{3} \sin x = 2 \text{ ; а) } \cos x + \sin x = 1}$$

2. (МГУ, биологич. ф-т, 2005) Решите уравнение

$$\cos x - \sqrt{3} \sin x = \sqrt{2}.$$

$$\boxed{\mathbb{Z} \ni u, \cos x - \sqrt{3} \sin x = \sqrt{2}}$$

3. Решите уравнение:

а) $3 \cos x - 4 \sin x = 5$;

б) $12 \sin x + 5 \cos x = 13$.

$$\boxed{\text{а) } 3 \cos x - 4 \sin x = 5 \text{ ; б) } 12 \sin x + 5 \cos x = 13}$$

4. Решите уравнение:

а) $2 \cos x - 3 \sin x = 1$;

б) $3 \sin x + \cos x = 3$.

$$\boxed{\text{а) } 2 \cos x - 3 \sin x = 1 \text{ ; б) } 3 \sin x + \cos x = 3}$$

5. Решите уравнение:

а) $\sin x + \cos x = \frac{3}{2}$;

б) $5 \sin x - 7 \cos x = 9$.

$$\boxed{\text{а) } \sin x + \cos x = \frac{3}{2} \text{ ; б) } 5 \sin x - 7 \cos x = 9}$$

6. Решите уравнение:

а) $\sin 2x + \sin 4x = 0$;

б) $\sin 5x - \sin 3x = 0$;

в) $\cos 2x + \cos 4x = 0$;

г) $\cos 5x - \cos 3x = 0$.

$$\boxed{\text{а) } \sin 2x + \sin 4x = 0 \text{ ; б) } \sin 5x - \sin 3x = 0 \text{ ; в) } \cos 2x + \cos 4x = 0 \text{ ; г) } \cos 5x - \cos 3x = 0}$$

7. Решите уравнение:

а) $\sin x + \sin 3x = \sin 2x$;

б) $\cos x + \cos 3x = \cos 2x$;

в) $\cos 5x + \cos 6x + \cos 7x = 0$;

г) $\sin 3x - \sin 4x + \sin 5x = 0$.

$$\frac{u\sqrt{z} + \frac{x}{z} \mp \frac{v}{u\sqrt{x}}}{(1 + u\sqrt{z} + \frac{x}{z} \mp \frac{9}{u\sqrt{x}} + \frac{z1}{z})} \left(\frac{u\sqrt{z} + \frac{x}{z} \mp \frac{z}{u\sqrt{x}} + \frac{v}{z} \right) (9 + u\sqrt{z} + \frac{x}{z} \mp \frac{z}{u\sqrt{x}}) (v)$$

8. Решите уравнение:

а) $\cos x - \sqrt{3} \sin x = \cos 3x$;

б) $\sin 3x = \sin 7x + \sqrt{3} \sin 2x$.

$$\frac{\frac{z}{u\sqrt{z}} + \frac{9}{z} \mp \frac{z}{u\sqrt{x}}}{(9 + \frac{z}{u\sqrt{x}} + \frac{9}{z} u(1-))} \left(u\sqrt{z} \right)$$

9. (МГУ, ДВИ, 2012) Решите уравнение

$$\sin 4x + \sqrt{3} \sin 3x + \sin 2x = 0.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \left(\frac{x}{u\sqrt{x}} \right)$$

10. Решите уравнение:

а) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$;

б) $\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x = 0$;

в) $\cos x - \cos 3x + \cos 7x - \cos 9x = 0$;

г) $\sin x - \sin 2x + \sin 5x + \sin 8x = 0$.

$$\frac{\frac{z}{u\sqrt{z}} + \frac{z}{z} \mp \frac{x}{u\sqrt{x}}}{(1 + \frac{x}{u\sqrt{x}} + \frac{9}{z} \mp \frac{z}{u\sqrt{x}})} \left(\frac{v}{u\sqrt{x}} + \frac{8}{z} \mp \frac{z}{u\sqrt{x}} + \frac{v}{z} \right) (9 + u\sqrt{z} + \frac{x}{z} \mp \frac{z}{u\sqrt{x}}) (9 + u\sqrt{z} + \frac{x}{z} \mp \frac{z}{u\sqrt{x}}) (v)$$

11. Решите уравнение:

а) $\sin 3x = \cos 2x$;

б) $\sin 5x = \cos 4x$.

$$u\sqrt{z} + \frac{z}{z} \mp \frac{6}{u\sqrt{z}} + \frac{81}{z} (9 + u\sqrt{z} + \frac{z}{z} \mp \frac{z}{u\sqrt{z}} + \frac{01}{z}) (v)$$

12. (МГУ, экономич. ф-т, 2007) Найдите все решения уравнения $\cos 3x = \sin x$, удовлетворяющие одновременно двум неравенствам: $\sin x \geq 0$, $\cos x \leq 0$.

$$\mathbb{Z} \ni u \left(u\sqrt{z} + \frac{8}{u\sqrt{z}} \right), \left(u\sqrt{z} + \frac{v}{u\sqrt{z}} \right)$$

13. Решите уравнение:

а) $4 \sin 3x \sin x + 2 \cos 2x + 1 = 0$;

б) $\cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos x = \frac{1}{2}$.

$$u\sqrt{z} + \frac{x}{z} \mp (9 + u\sqrt{x} + \frac{x}{z} \mp (v)$$

14. Решите уравнение:

а) $\cos 7x \cos 13x = \cos x \cos 19x$;

б) $\sin 2x \sin 6x = \cos x \cos 3x$.

$$\frac{\xi}{u\lambda} + \frac{9}{\lambda} \cdot \frac{9}{u\lambda} + \frac{0\Gamma}{\lambda} \left(9 \cdot \frac{\zeta\Gamma}{u\lambda} \right) (\mathfrak{e})$$

15. Решите уравнение:

а) $\sin x \cos 5x + \sin 3x \cos 9x = \frac{1}{2}(\cos 6x + \sin 12x)$; б) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sin 3x \cos x$.

$$\frac{\zeta}{u\lambda} + \frac{8}{\lambda} \left(9 \cdot \frac{9}{u\lambda} + \frac{0\zeta}{\lambda} \cdot u\lambda + \frac{\lambda}{\lambda} \right) (\mathfrak{e})$$

16. Решите уравнение:

а) $\sin^2 x + \sin^2 2x = \frac{9}{16}$;

б) $6 \cos^2 x - 2 \sin^2 2x = 1$.

$$\frac{\zeta}{u\lambda} + \frac{\lambda}{\lambda} \left(9 \cdot u\lambda + \frac{\lambda}{\lambda} \cos 9\pi \frac{\zeta}{\lambda} \right) (\mathfrak{e})$$

17. (МГУ, централизованный экзамен, 2012) Решите уравнение

$$\sin^2 2x = \sin^2 x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \cdot \frac{\xi}{u\lambda}$$

18. (МГУ, ф-т почвоведения, 2007) Решить уравнение

$$\sin^2 11x = \cos^2 17x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \cdot \frac{9}{u\lambda} + \frac{\zeta\Gamma}{\lambda} \cdot \frac{8\zeta}{u\lambda} + \frac{9\zeta}{\lambda}$$

19. Решите уравнение:

а) $\cos^2 x + \cos^2 2x = \cos^2 3x + \cos^2 4x$;

б) $\sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x + \sin^2 5x = 2$.

$$\frac{\lambda}{u\lambda} + \frac{\lambda\Gamma}{\lambda} \cdot \frac{\zeta}{u\lambda} + \frac{\lambda}{\lambda} \left(9 \cdot \frac{9}{u\lambda} \cdot \frac{\zeta}{u\lambda} \right) (\mathfrak{e})$$

20. (МГУ, ф-т биоинженерии и биоинформатики, 2009) Решить уравнение

$$8 \cos^2 5x - 4 \cos^2 10x = 1.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \cdot u\lambda + \frac{\lambda}{\lambda}$$

21. Решите уравнение:

а) $2 \cos 2x - 3 \cos x + 3 \sin x = 0$; б) $\cos x + \sin x = \frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x}$.

$$\boxed{u\lambda + \frac{\nu}{x} - u\lambda\tau + \frac{\xi}{x} u\lambda\tau (g; u\lambda + \frac{\nu}{x}) (e)}$$

22. Решите уравнение:

а) $2 \cos^2 x - \sin x \cos x - 3 \cos x + \sin x + 1 = 0$; б) $3 \sin x \cos x + 4 \sin x = 4 - 3 \cos^2 x + \cos x$.

$$\boxed{u\lambda + \frac{\xi}{1} \text{ arcsin } u(1-), u\lambda\tau + \nu, u\lambda\tau + \frac{\xi}{x} (g; u\lambda\tau + \frac{\xi}{1} \text{ arcsin } - \frac{\xi}{1} \text{ arcsin } u\lambda\tau + \frac{\xi}{x} - u\lambda\tau) (e)}$$

23. Решите уравнение:

а) $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin 2x$; б) $\sin x \cos x = 6(\sin x - \cos x - 1)$.

$$\boxed{u\lambda\tau + \nu, u\lambda\tau + \frac{\xi}{x} (g; u\lambda\tau + \frac{\xi}{x} - u\lambda\tau + \frac{\xi}{x} u\lambda\tau + \frac{\nu}{x}) (e)}$$

24. Решите уравнение:

а) $\sin^3 x + \cos^3 x = \cos 2x$; б) $\cos^3 x - \sin^3 x = \cos 2x$.

$$\boxed{u\lambda\tau + \frac{\xi}{x}, u\lambda + \frac{\nu}{x}, u\lambda\tau (g; u\lambda\tau + \frac{\xi}{x} - u\lambda + \frac{\nu}{x} - u\lambda\tau) (e)}$$

25. Решите уравнение:

а) $\sin x + 2 \operatorname{ctg} \frac{x}{2} = 3$; б) $6 + 6 \cos x + 5 \sin x \cos x = 0$.

$$\boxed{u\lambda\tau + \tau \operatorname{arctg} 2 + 2\pi n, 2\pi n + \nu (g; u\lambda\tau + \frac{\xi}{x}) (e)}$$

26. (МГУ, филологич. ф-т, 2005) Решить уравнение

$$2 + \sin x = 3 \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

$$\boxed{\mathbb{Z} \ni u, 2\pi n, \frac{\xi}{x}} (e)$$

27. Решите уравнение:

а) $\sin 6x + 2 = 2 \cos 4x$; б) $\cos 9x - 2 \cos 6x = 2$.

$$\boxed{\frac{\xi}{u\lambda\tau} + \frac{6}{x} \mp \frac{\xi}{u\lambda} + \frac{9}{x} (g; \frac{\xi}{u\lambda} + \frac{\xi}{x} 1 + u(1-), \frac{\xi}{u\lambda}) (e)}$$

28. Решите уравнение:

а) $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin 2x - 0,5$; б) $2(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\sin^4 x + \cos^4 x) = \cos 2x$.

$$\frac{u\lambda + \frac{\pi}{2}}{\pi} \text{ (г) ; } \frac{u\lambda + \frac{\pi}{2}}{\pi} \text{ (в)}$$

29. Решите уравнение:

а) $\sqrt{1 - \cos x} = \sin x$; б) $\sqrt{5 \sin x + \cos 2x} = -2 \cos x$;
 в) $\sqrt{5 \cos x - \cos 2x} = -2 \sin x$; г) $\sqrt{\cos x + \cos 3x} = \sqrt{2} \cos x$.

$$\frac{u\lambda\tau + \frac{\pi}{2}}{\pi} \mp \frac{u\lambda + \frac{\pi}{2}}{\pi} \text{ (г) ; } \frac{u\lambda\tau + \frac{\pi}{2}}{\pi} - \frac{u\lambda + \frac{\pi}{2}}{\pi} \text{ (в) ; } \frac{u\lambda\tau + \frac{\pi}{2}}{\pi} \text{ (г) ; } \frac{u\lambda\tau + \frac{\pi}{2}}{\pi} \text{ (в)}$$

30. Решите уравнение:

а) $\sqrt{\sin x} + \cos x = 0$; б) $\sqrt{\cos x} + \sin x = 0$.

$$\frac{u\lambda\tau + \frac{\pi}{2}}{1 - \sqrt{2}} \text{ (г) ; } \frac{u\lambda\tau + \frac{\pi}{2}}{1 - \sqrt{2}} \text{ (в)}$$

31. Решите уравнение:

а) $\sqrt{3 \sin^2 x - 2} = 3 \cos x - 1$; б) $\sqrt{5 + \cos 2x} = \sin x + 3 \cos x$.

$$\frac{u\lambda\tau + \frac{\pi}{8}}{\pi} \text{ ; } \frac{u\lambda\tau + \frac{\pi}{8}}{\pi} - \frac{u\lambda + \frac{\pi}{2}}{\pi} \text{ (г) ; } \frac{u\lambda\tau + \frac{\pi}{8}}{\pi} \mp \frac{u\lambda + \frac{\pi}{2}}{\pi} \text{ (в)}$$

32. Решите уравнение:

а) $\sqrt{\frac{1}{2} + \sin x} = \sqrt{\frac{1}{2} - \sin 3x}$; б) $\sqrt{6 \sin x \cos 2x} = \sqrt{-7 \sin 2x}$;
 в) $\sqrt{\sin 2x} = \sqrt{\cos x - \sin x - 1}$; г) $\sqrt{2 \cos x - \sin x} = \text{ctg } x \sqrt{\sin x}$.

$$\frac{u\lambda\tau + \frac{\pi}{2}}{\pi} \text{ (г) ; } \frac{u\lambda\tau + \frac{\pi}{2}}{\pi} - \frac{u\lambda + \frac{\pi}{2}}{\pi} \text{ (в) ; } \frac{u\lambda\tau + \frac{\pi}{2}}{\pi} \text{ (г) ; } \frac{u\lambda\tau + \frac{\pi}{2}}{\pi} \text{ (в)}$$

33. Решите уравнение:

а) $|\sin x| = \sin x + 2 \cos x$; б) $\text{tg } x + 8|\text{ctg } x| + \text{ctg } 2x = 0$;
 в) $\sin 3x - |\sin x| = \sin 2x$; г) $|\cos x| - \cos 3x = \sin 2x$.

$$\frac{u\lambda + \frac{\pi}{2}}{\pi} \text{ ; } \frac{u\lambda + \frac{\pi}{2}}{\pi} \text{ ; } \frac{u\lambda\tau + \frac{\pi}{2}}{\pi} \text{ (г) ; } \frac{u\lambda + \frac{\pi}{2}}{\pi} - \frac{u\lambda\tau + \frac{\pi}{2}}{\pi} \text{ (в) ; } \frac{u\lambda + \frac{\pi}{2}}{\pi} \text{ (г) ; } \frac{u\lambda + \frac{\pi}{2}}{\pi} \text{ (в)}$$

34. Решите уравнение:

а) $4|\cos x| + 3 = 4 \sin^2 x$; б) $4|\sin x| + 2 \cos 2x = 3$.

$$\frac{u\lambda + \frac{\pi}{2}}{\pi} \mp \frac{u\lambda + \frac{\pi}{2}}{\pi} \text{ (г) ; } \frac{u\lambda\tau + \frac{\pi}{2}}{1 - \sqrt{2}} \mp \frac{u\lambda + \frac{\pi}{2}}{\pi} \text{ (в)}$$

35. Найти все корни уравнения

$$6 \sin x + 4(\sin 3x - \sin 5x) - \sin 7x = 256 \sin^5 x \cos^4 x,$$

принадлежащие отрезку $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$.

$$\frac{\pi}{3}, \frac{6}{\pi^2}, \frac{6}{\pi}, 0$$

36. Решите уравнение:

а) $\sin x \sin 9x = 1;$

б) $\cos x - \cos 6x = -2;$

в) $\sin x = 2 + \sin x \cos 6x;$

г) $\sin 5x \sin 7x = 1.$

$$\text{лэн үинэнэд (г) } u\pi z + \frac{\pi}{x} \text{ (в) } u\pi z + \pi \text{ (б) } u\pi + \frac{\pi}{x} \text{ (а)}$$

37. Решите уравнение: $(\cos 4x - \cos 2x)^2 = 5 + \sin 3x.$

$$u\pi z + \frac{\pi}{x}$$

38. Решите уравнение: $(\sin x - \sqrt{3} \cos x) \sin 3x = 2.$

$$u\pi + \frac{9}{x} -$$

39. Решите уравнение: $\sin^2 x + \frac{1}{4} \sin^2 3x = \sin x \sin^2 3x.$

$$u\pi + \frac{9}{x} u(1-) \text{ ' } u\pi$$

40. Решите уравнение: $\sqrt{3} \sin x + \sin y \cos x = 2.$

$$\mathbb{Z} \ni u \text{ ' } y \text{ ' } (u\pi z + \frac{\pi}{x} - ; k\pi z + \frac{\pi}{x^2}) \text{ ' } (u\pi z + \frac{\pi}{x} ; k\pi z + \frac{\pi}{x})$$