Тренировочные задачи

Основное тригонометрическое тождество

1. Докажите, что для всех допустимых значениях α справедливы равенства:

а) $(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)=\cos^2\alpha$;

б) $\dfrac{\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}=\operatorname{ctg}^2\alpha$;

в) $(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)(1-\cos^2\alpha)=1$;

г) $(1+\operatorname{tg}^2\alpha)(1-\sin^2\alpha)=1$;

д) $\left(1+\operatorname{tg}^2\alpha+\dfrac{1}{\sin^2\alpha}\right)\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1$;

е) $\dfrac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}=\operatorname{tg}^2\alpha$;

ж) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=1-2\sin^2\alpha$;

з) $\left(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha\right)^2+4\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1$;

и) $\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}+\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{2}{\sin\alpha}$;

к) $\dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}=\dfrac{2}{\cos\alpha}$;

л) $\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha=\operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\alpha$;

м) $\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha=\operatorname{ctg}^2\alpha\cos^2\alpha$;

н) $\dfrac{\sin^3\alpha-\cos^3\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}-\sin\alpha\cos\alpha=1$;

о) $\dfrac{\sin^3\alpha+\cos^3\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}+\sin\alpha\cos\alpha=1$.

2. Известно, что $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Найдите $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$.

$\cos\alpha=-\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{3}{4}$

3. Известно, что $\cos\alpha=-\frac{5}{13}$ и $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$. Найдите $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$.

$\sin\alpha=-\frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{12}{5}$

4. Известно, что $\sin\alpha=-\frac{8}{17}$ и $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$. Найдите $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$.

$\cos\alpha=\frac{15}{17}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{8}{15}$

5. Известно, что $\cos\alpha=\frac{7}{25}$ и $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Найдите $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$.

$\sin\alpha=\frac{24}{25}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{24}{7}$

6. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{9}{40}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Найдите $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

$\sin\alpha=\frac{9}{41}$, $\cos\alpha=-\frac{40}{41}$

7. Известно, что $\operatorname{ctg}\alpha=3$ и $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$. Найдите $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

$\sin\alpha=-\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos\alpha=-\frac{3}{\sqrt{10}}$

8. Две стороны треугольника равны 2 и 3, а синус тупого угла, заключённого между этими сторонами, равен $2\sqrt{2}/3$. Найдите третью сторону треугольника.

$\sqrt{17}$

9. Найдите α, если $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{1}{2}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

$\boxed{\frac{5\pi}{6}}$

10. Найдите все значения x, принадлежащие отрезку $[0;\pi]$, для которых выполнено равенство $\sin x + \cos x = 1$.

$\boxed{0,\ \frac{\pi}{2}}$

11. Найдите $\cos x$, если $\sin x + 3\cos x = 2$.

$\boxed{\frac{6+\sqrt{6}}{10} \text{ или } \frac{6-\sqrt{6}}{10}}$