Тренировочные задачи

Формулы двойного и половинного угла

1. Вычислите:

а) $2\sin 15^\circ \cos 15^\circ$;

б) $\sin\dfrac{\pi}{8}\cos\dfrac{\pi}{8}$;

в) $4\sin 75^\circ \cos 75^\circ$;

г) $\dfrac{1}{2}\sin 105^\circ \cos 105^\circ$;

д) $\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+\sin\dfrac{\pi}{12}\right)^2$;

е) $\left(\sin\dfrac{7\pi}{8}-\cos\dfrac{7\pi}{8}\right)^2$.

а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{4}$; в) 1; г) $-\frac{1}{8}$; д) $\frac{3}{2}$; е) $1+\frac{\sqrt{2}}{2}$

2. Вычислите:

а) $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$;

б) $\sin^2\dfrac{\pi}{8}-\cos^2\dfrac{\pi}{8}$;

в) $2\cos^2 75^\circ - 1$;

г) $1-2\cos^2\dfrac{5\pi}{8}$;

д) $1-2\sin^2\dfrac{7\pi}{12}$;

е) $2\sin^2 165^\circ - 1$.

а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; д) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; е) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. Упростите выражение:

а) $\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos\alpha}$;

б) $\dfrac{2\sin^2\alpha}{\sin 2\alpha}$;

в) $\dfrac{1-\cos 2\beta}{\sin\beta}$;

г) $\dfrac{1+\cos 2\beta}{\cos\beta}$;

д) $\dfrac{\cos 40^\circ+\sin^2 20^\circ}{\cos^2 20^\circ}$;

е) $\dfrac{\cos 10^\circ}{\cos 5^\circ+\sin 5^\circ}+\sin 5^\circ$.

а) $2\sin\alpha$; б) $\operatorname{tg}\alpha$; в) $2\sin\beta$; г) $2\cos\beta$; д) 1; е) $\cos 5^\circ$

4. Упростите выражение:

а) $\sin 2\alpha + (\sin\alpha-\cos\alpha)^2$;

б) $\sin 2\alpha \operatorname{ctg}\alpha - 1$;

в) $\dfrac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{1-\cos\alpha}$;

г) $\dfrac{\cos 2x-\cos^2 x}{1-\cos^2 x}$;

д) $(\cos 3\alpha+\sin 3\alpha)(\cos 3\alpha-\sin 3\alpha)$;

е) $1-2\sin^2 4x$.

а) 1; б) $\cos 2\alpha$; в) $2\sin\alpha$; г) -1; д) $\cos 6\alpha$; е) $\cos 8x$

5. Известно, что $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ и $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Найдите $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$.

$\sin 2\alpha = -\frac{24}{25}$, $\cos 2\alpha = -\frac{7}{25}$

6. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{5}{12}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Найдите $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$.

$\sin 2\alpha = -\frac{120}{169}$, $\cos 2\alpha = \frac{119}{169}$

7. В равнобедренном треугольнике синус угла при основании равен 1/3. Найдите косинус угла при вершине этого треугольника.

$-\frac{7}{9}$

8. Вычислите $\sin\frac{\pi}{8}$ и $\cos\frac{\pi}{8}$.

$\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

9. Упростите выражение:

а) $\dfrac{2\operatorname{tg}3^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 3^\circ}$; б) $\dfrac{6\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{12}}$;

в) $\dfrac{2}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}$; г) $2\sin\dfrac{\pi+x}{2}\cos\dfrac{\pi+x}{2}$;

д) $(1-\operatorname{tg}^2\alpha)\cos^2\alpha$; е) $\cos^2\dfrac{\pi+\alpha}{4}-\sin^2\dfrac{\pi+\alpha}{4}$.

а) $\operatorname{tg}6^\circ$; б) $\sqrt{3}$; в) $\sin\alpha$; г) $-\sin x$; д) $\cos 2\alpha$; е) $-\sin\frac{\alpha}{2}$

10. Докажите тождество:

а) $(\cos\alpha+\sin\alpha)^2 = 1+\sin 2\alpha$; б) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha = \cos 2\alpha$;

в) $\operatorname{ctg}\alpha-\sin 2\alpha = \operatorname{ctg}\alpha\cos 2\alpha$; г) $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = 2\operatorname{ctg}\alpha$;

д) $\sin 2\alpha-\operatorname{tg}\alpha = \cos 2\alpha\operatorname{tg}\alpha$; е) $(\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha)\sin 2\alpha = 2\cos 2\alpha$;

ж) $(1+\cos 2\alpha)\operatorname{tg}\alpha = \sin 2\alpha$; з) $\sin\alpha\cos^3\alpha-\sin^3\alpha\cos\alpha = \dfrac{1}{4}\sin 4\alpha$;

и) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha+\sin^2\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha-1$; к) $\dfrac{\sin 2\alpha-2\cos\alpha}{\sin\alpha-\sin^2\alpha} = -2\operatorname{ctg}\alpha$;

л) $\left(\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}\right)\sin 2\alpha = 4\sin\alpha$; м) $\left(\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\right)\sin 2\alpha = 4\cos\alpha$;

н) $\dfrac{1-\cos\alpha+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha-\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$; о) $\dfrac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$.

11. Найдите $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha+\cos\alpha = \frac{1}{2}$.

$-\frac{3}{4}$

12. Докажите тождество:

$$\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha} = 2.$$

13. Докажите тождество:

а) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = 1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 2\alpha$;   б) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = 1 - \dfrac{3}{4}\sin^2 2\alpha$.

14. Выведите *формулы тройного угла*:

а) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$;

б) $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$;

в) $\operatorname{tg} 3\alpha = \dfrac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}$.

15. Исходя из равенства $\cos 54^\circ = \sin 36^\circ$, вычислите $\sin 18^\circ$.

$\boxed{\frac{\sqrt{5}-1}{4}}$

16. Покажите, что:

а) $\cos\dfrac{\pi}{5}\cos\dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{1}{4}$;   б) $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \dfrac{1}{8}$.