Процессы и операции

1. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017, 5–6.4, 7–8.3*) Робот движется по прямолинейным участкам, при этом совершая повороты через каждую минуту на 90 градусов направо или налево (временем на поворот пренебречь). За минуту робот проходит 10 метров. На каком минимальном расстоянии от начального положения он может оказаться через 9 минут после начала движения, если в течение первой минуты робот не поворачивал?

2. (*Всеросс., 2016, ШЭ, 9*) Есть три сосуда объёмом 3 л, 4 л и 5 л без делений, кран с водой, раковина и 3 л сиропа в самом маленьком сосуде. Можно ли с помощью переливаний получить 6 л смеси воды с сиропом так, чтобы в каждом сосуде количество воды было равно количеству сиропа?

3. (*Всеросс., 2018, ШЭ, 10.3*) На доске в произвольном порядке выписаны числа от 1 до 2017. Два числа можно поменять местами, если одно из них делится на другое. Докажите, что за несколько таких операций числа можно расположить в порядке возрастания.

4. (*ОММО, 2016, 9–10*) На доске написано число 27. Каждую минуту число стирают с доски и записывают на его место произведение его цифр, увеличенное на 12. Например, через минуту на доске будет написано число $2 \cdot 7 + 12 = 26$. А что окажется на доске через час?

5. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11*) На доске написаны числа $1, 2, \ldots, 2015$. Над ними последовательно проделывают 2014 операций, причём n-я по счёту операция состоит в следующем: произвольные числа a и b (из написанных на доске) стираются и дописывается одно число, равное ab/n. Что останется на доске в конце?

6. (*«Курчатов», 2016, 8*) На олимпиаду пришли 300 учеников из не менее чем 4 школ. Докажите, что их можно разбить на команды по 3 человека в каждой так, чтобы в каждой команде либо все три ученика были из одной школы, либо все три — из разных школ.

7. (*«Высшая проба», 2016, 7–9*) На доске написаны числа $1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/100$. Разрешается стереть любые два числа a и b и записать вместо них $a+b+ab$. После нескольких таких операций на доске осталось одно число. Чему оно может быть равно?

8. (*ММО, 2016, 8*) Чётное число орехов разложено на три кучки. За одну операцию можно переложить половину орехов из кучки с чётным числом орехов в любую другую кучку. Докажите, что, как бы орехи ни были разложены изначально, такими операциями можно в какой-нибудь кучке собрать ровно половину всех орехов.

9. (*Всеросс., 2014, МЭ, 8*) На доске были записаны числа 3, 9 и 15. Разрешалось сложить два записанных числа, вычесть из этой суммы третье, а результат записать на доску вместо того числа, которое вычиталось. После многократного выполнения такой операции на доске оказались три числа, наименьшее из которых было 2013. Каковы были два остальных числа?

10. (*«Высшая проба», 2015, 8–9*) Коля придумал себе развлечение: он переставляет цифры в числе 2015, после чего ставит между любыми двумя цифрами знак умножения. При этом ни один из получившихся двух сомножителей не должен начинаться с нуля. Затем он вычисляет значение этого выражения. Например: $150 \cdot 2 = 300$, или $10 \cdot 25 = 250$. Какое наибольшее число у него может получиться в результате такого вычисления?

11. (*Турнир городов, 2017, 8–9*) Сто медвежат нашли в лесу ягоды: самый младший успел схватить 1 ягоду, медвежонок постарше — 2 ягоды, следующий — 4 ягоды, и так далее, самому старшему досталось 2^{99} ягод. Лиса предложила им поделить ягоды «по справедливости». Она может подойти к двум медвежатам и распределить их ягоды поровну между ними, а если при этом возникает лишняя ягода, то лиса её съедает. Такие действия она продолжает до тех пор, пока у всех медвежат не станет ягод поровну. Какое наименьшее количество ягод может оставить медвежатам лиса?

12. (*Турнир городов, 2017, 10–11*) Сто медвежат нашли в лесу ягоды: самый младший успел схватить 1 ягоду, медвежонок постарше — 2 ягоды, следующий — 4 ягоды, и так далее, самому старшему досталось 2^{99} ягод. Лиса предложила им поделить ягоды «по справедливости». Она может подойти к двум медвежатам и распределить их ягоды поровну между ними, а если при этом возникает лишняя ягода, то лиса её съедает. Такие действия она продолжает до тех пор, пока у всех медвежат не станет ягод поровну. Какое наибольшее количество ягод может съесть лиса?

13. (*Турнир городов, 2017, 8–9*) Десяти ребятам положили в тарелки по 100 макаронин. Есть ребята не хотели и стали играть. Одним действием кто-то из детей перекладывает из своей тарелки по одной макаронине всем другим детям. После какого наименьшего количества действий у всех в тарелках может оказаться разное количество макаронин?

14. (*Турнир городов, 2017, 10–11*) 100 ребятам положили в тарелки по 100 макаронин. Есть ребята не хотели и стали играть. Одним действием кто-то из детей перекладывает из своей тарелки по одной макаронине некоторым (кому хочет) из остальных. После какого наименьшего количества действий у всех в тарелках может оказаться разное количество макаронин?

15. (*Всеросс., 2014, МЭ, 9*) Двадцать пять монет раскладывают по кучкам следующим образом. Сначала их произвольно разбивают на две группы. Затем любую из имеющихся групп снова разбивают на две группы, и так далее до тех пор, пока каждая группа не будет состоять из одной монеты. При каждом разбиении какой-либо группы на две записывается произведение количеств монет в двух получившихся группах. Чему может быть равна сумма всех записанных чисел?

16. (*Всеросс., 2017, МЭ, 10.6*) 100 включённых и 100 выключенных фонариков случайным образом разложены по двум коробкам. У каждого фонарика есть кнопка, нажатие которой выключает горящий фонарик и зажигает выключенный. Ваши глаза завязаны, и Вы не можете видеть, горит ли фонарик. Но Вы можете перекладывать фонарики из коробки в коробку и нажимать на них кнопки. Придумайте способ добиться того, чтобы горящих фонариков в коробках стало поровну.

17. (*Всеросс., 2014, РЭ, 9*) Имеются 2013 карточек, на которых написана цифра 1, и 2013 карточек, на которых написана цифра 2. Вася складывает из этих карточек 4026-значное число. За один ход Петя может поменять местами некоторые две карточки и заплатить Васе 1 рубль. Процесс заканчивается, когда у Пети получается число, делящееся на 11. Какую наибольшую сумму может заработать Вася, если Петя стремится заплатить как можно меньше?

18. (*Всеросс., 2014, финал, 9*) В государстве n городов, и между каждыми двумя из них курсирует экспресс (в обе стороны). Для любого экспресса цены билетов «туда» и «обратно» равны, а для любых разных экспрессов эти цены различны. Докажите, что путешественник может выбрать начальный город, выехать из него и проехать последовательно на $n-1$ экспрессах, платя за проезд на каждом следующем меньше, чем за проезд на предыдущем. (Путешественник может попадать несколько раз в один и тот же город.)

19. (*Олимпиада ВШЭ, 2011, 9–11*) Дан остроугольный треугольник на плоскости. В нём проводится высота. В одном из получившихся треугольников снова проводится высота. Такая операция повторяется 2011 раз: каждый раз проводится высота в каком-нибудь из образовавшихся при предыдущих построениях треугольников. Рассмотрим все прямые, содержащие проведённые высоты. Докажите, что на плоскости можно расположить угол в 30 градусов, не имеющий общих точек ни с одной из этих прямых.

20. (*ММО, 2017, 11.3*) Детектив Ниро Вульф расследует преступление. В деле замешаны 80 человек, среди которых один — преступник, ещё один — свидетель преступления (но неизвестно, кто это). Каждый день детектив может пригласить к себе одного или нескольких из этих 80 человек, и если среди приглашённых есть свидетель, но нет преступника, то свидетель сообщит, кто преступник. Может ли детектив заведомо раскрыть дело за 12 дней?

21. (*Всеросс., 2014, финал, 10*) В сейфе n ячеек с номерами от 1 до n. В каждой ячейке первоначально лежала карточка с её номером. Вася переложил карточки в некотором порядке так, что в i-й ячейке оказалась карточка с числом a_i. Петя может менять местами любые две карточки с номерами x и y, платя за это $2|x-y|$ рублей. Докажите, что Петя сможет вернуть все карточки на исходные места, заплатив не более $|a_1-1|+|a_2-2|+\ldots+|a_n-n|$ рублей.

22. (*Всеросс., 2014, МЭ, 11*) На экране компьютера — число 12. Каждую секунду число на экране умножают или делят либо на 2, либо на 3. Результат действия возникает на экране вместо записанного числа. Ровно через минуту на экране появилось число. Могло ли это быть число 54?

23. (*Турнир городов, 2015, 10–11*) На столе лежала кучка серебряных монет. Каждым действием либо добавляли одну золотую монету и записывали количество серебряных монет на первый листок, либо убирали одну серебряную монету и записывали количество золотых монет на второй листок. В итоге на столе остались только золотые монеты. Докажите, что в этот момент сумма всех чисел на первом листке равнялась сумме всех чисел на втором.

24. (*Турнир городов, 2016, 10–11*) а) Есть неограниченный набор карточек со словами «abc», «bca», «cab». Из них составляют слово по такому правилу. В качестве начального слова выбирается любая карточка, а далее на каждом шаге к имеющемуся слову можно либо приклеить карточку слева или справа, либо разрезать слово в любом месте (между буквами) и вклеить карточку туда. Можно ли так составить палиндром?

б) Есть неограниченный набор красных карточек со словами «abc», «bca», «cab» и синих карточек со словами «cba», «acb», «bac». Из них по тем же правилам составили палиндром. Верно ли, что было использовано одинаковое количество красных и синих карточек?

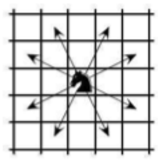
25. (*Всеросс., 2017, РЭ, 11.7*) На плоскости проведено несколько прямых, никакие две из которых не параллельны и никакие три не проходят через одну точку. Докажите, что в областях, на которые прямые поделили плоскость, можно расставить положительные числа так, чтобы суммы чисел по обе стороны каждой из проведённых прямых были равны.

26. (*Всеросс., 2017, финал, 11.4*) У фокусника и помощника есть колода с картами; одна сторона («рубашка») у всех карт одинакова, а другая окрашена в один из 2017 цветов (в колоде по 1000000 карт каждого цвета). Фокусник и помощник собираются показать следующий фокус. Фокусник выходит из зала, а зрители выкладывают на стол в ряд $n > 1$ карт рубашками вниз. Помощник смотрит на эти карты, а затем все, кроме одной, переворачивает рубашкой вверх, не меняя их порядка. Затем входит фокусник, смотрит на стол, указывает на одну из закрытых карт и называет её цвет. При каком наименьшем n фокусник может заранее договориться с помощником так, чтобы фокус гарантированно удался?

Олимпиада им. Леонарда Эйлера

16.4.6. В школе 30 кружков, в каждом занимаются 40 детей. Для каждого $i = 1, 2, \ldots, 30$ обозначим через n_i количество детей, занимающихся ровно в i кружках. Докажите, что в этой же школе можно организовать 40 кружков с 30 детьми в каждом так, чтобы числа n_i для этих новых кружков были бы теми же самыми.

15.3.8. На шахматной доске размером 20×20 расставлены 220 коней, которые бьют все свободные клетки. Докажите, что можно убрать 20 коней таким образом, чтобы оставшиеся кони били все свободные клетки. Напомним, что конь бьёт буквой «Г» (см. рисунок).



15.4.1. Назовём *хорошими прямоугольниками* квадрат со стороной 2 и прямоугольник со сторонами 1 и 11. Докажите, что любой прямоугольник с целочисленными сторонами, большими 100, можно разрезать на хорошие прямоугольники.

14.4.5. Петя и Вася одновременно ввели в свои калькуляторы одно и то же не равное 0 целое число. После этого каждую минуту Петя либо прибавлял к своему числу 10, либо умножал его на 2014; одновременно Вася в первом случае вычитал из своего числа 10, а во втором — делил его на 2014. Могло ли оказаться, что через некоторое время числа у Пети и Васи снова стали равными?

13.3.2. На пути в музей группа детсадовцев построилась парами, причём количество пар из двух мальчиков было в три раза больше количества пар из двух девочек. На обратном пути та же группа построилась так, что количество пар из двух мальчиков было в четыре раза больше количества пар из двух девочек. Докажите, что эту же группу можно построить так, чтобы количество пар из двух мальчиков было в семь раз больше количества пар из двух девочек.

13.4.2. Из шахматной доски размером 13×13 вырезали две противоположные угловые клетки. На оставшейся части доски отметили несколько клеток. Докажите, что на отмеченные клетки можно поставить шахматных королей так, чтобы всего королей было не больше 47, и они били все пустые отмеченные клетки. Напомним, что шахматный король бьёт все клетки, соседние с ним по вертикали, горизонтали и диагонали.

13.4.8. 99 мудрецов сели за круглый стол. Им известно, что пятидесяти из них надели колпаки одного из двух цветов, а сорока девяти остальным — другого (но заранее неизвестно, какого именно из двух цветов 50 колпаков, а какого — 49). Каждый из мудрецов видит цвета всех колпаков, кроме своего собственного. Все мудрецы должны одновременно написать (каждый на своей бумажке) цвет своего колпака. Смогут ли мудрецы заранее договориться отвечать так, чтобы не менее 74 из них дали верные ответы?

11.3.6. На доске написано число 1. Если на доске написано число a, его можно заменить любым числом вида $a + d$, где d взаимно просто с a и $10 \leqslant d \leqslant 20$. Можно ли через несколько таких операций получить на доске число $18! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 18$?

10.3.2. Найдите какие-нибудь семь последовательных натуральных чисел, каждое из которых можно изменить (увеличить или уменьшить) на 1 таким образом, чтобы произведение семи полученных в результате чисел равнялось произведению семи исходных чисел.

10.3.6. В компании из шести человек любые пять могут сесть за круглый стол так, что каждые два соседа окажутся знакомыми. Докажите, что и всю компанию можно усадить за круглый стол так, что каждые два соседа окажутся знакомыми.

10.4.5. На полке в произвольном порядке стоят десять томов энциклопедии, пронумерованных от 1 до 10. Разрешается менять местами любые два тома, между которыми стоит не меньше четырёх других томов. Всегда ли можно расставить все тома по возрастанию номеров?

9.3.1. Гриб называется *плохим*, если в нем не менее 10 червей. В лукошке 90 плохих и 10 хороших грибов. Могут ли все грибы стать хорошими после того, как некоторые черви переползут из плохих грибов в хорошие?