Признаки делимости

Признак делимости на 2. Число делится на 2 тогда и только тогда, когда его последняя цифра чётна.

Признак делимости на 10. Число делится на 10 тогда и только тогда, когда его последняя цифра равна 0.

Признак делимости на 5. Число делится на 5 тогда и только тогда, когда его последняя цифра равна 0 или 5.

Признак делимости на 3. Число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3.

Признак делимости на 9. Число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9.

Признак делимости на 4. Число делится на 4 тогда и только тогда, когда двузначное число, образованное двумя его последними цифрами (в том же порядке), делится на 4.

Признак делимости на 8. Число делится на 8 тогда и только тогда, когда трёхзначное число, образованное тремя его последними цифрами (в том же порядке), делится на 8.

Признак делимости на 11. У данного числа найдём сумму цифр, стоящих на чётных местах, и сумму цифр, стоящих на нечётных местах. Число делится на 11 тогда и только тогда, когда разность этих сумм делится на 11 (в частности, равна нулю).

Задачи

1. Даша и Таня по очереди выписывают на доску цифры шестизначного числа. Сначала Даша выписывает первую цифру, затем Таня — вторую, и так далее. Таня хочет, чтобы полученное в результате число делилось на три, а Даша хочет ей помешать. Кто из них может добиться желаемого результата независимо от ходов соперника?

Таня

2. Найдите число, которое делится на 9 и заключено между 123456 и 123465.

3. Придумайте а) четырёхзначное; б) пятизначное число, которое делится на 2, 3 и 11, но не делится на 5 и 9.

4. Покажите, что числа 753, 319, 2457, 6853, 12321, 1234321 являются составными.

5. Напишите наименьшее пятизначное число, которое делится на 11.

6. Какую цифру нужно приписать: а) справа; б) слева к числу 9375, чтобы получилось число, делящееся на 11?

7. Какую цифру нужно приписать: а) справа; б) слева к числу 5724, чтобы получилось число, делящееся на 9?

8. К числу 37 припишите справа и слева по одной цифре так, чтобы получившееся четырёхзначное число делилось на 3 и 11.

9. Используя по одному разу каждую из цифр 1, 5, 8, 9, напишите четырёхзначное число, которое: а) делится на 2 и 11; б) делится на 5 и 11; в) делится на 11, но не делится на 2; г) делится на 5, но не делится на 11.

10. Используя по одному разу каждую из цифр от 0 до 9, напишите: а) наименьшее чётное число; б) наибольшее нечётное число; в) наименьшее число, делящееся на 5; г) любое число, делящееся на 11.

11. Делится ли число 32561698 на 12?

12. Чтобы открыть сейф, нужно ввести код — семизначное число, состоящее из двоек и троек. Сейф откроется, если двоек в коде больше, чем троек, а сам код делится и на 3, и на 4. Какой код может открывать сейф?

13. Замените звездочки в записи числа 72∗4∗ цифрами так, чтобы это число делилось на 45. Сколько решений имеет эта задача?

14. (*Математический праздник, 2002, 6.3*) На доске были написаны 10 последовательных натуральных чисел. Когда стёрли одно из них, то сумма девяти оставшихся оказалась равна 2002. Какие числа остались на доске?

218, 219, 220, 221, 222, 224, 225, 226 и 227

15. (*Всеросс., 2014, II этап, 7.1*) Запишите несколько раз подряд число 2013 так, чтобы получившееся число делилось на 9. Ответ объясните.

16. (*Всеросс., 2016, II этап, 7.1*) На длинной ленте написаны цифры 201520152015... Вася вырезал ножницами два куска ленты и составил из них положительное число, которое делится на 45. Приведите пример таких кусков и запишите число, составленное из них.

17. (*Математический праздник, 2003, 7.1*) Чтобы открыть сейф, нужно ввести код — число, состоящее из семи цифр: двоек и троек. Сейф откроется, если двоек больше, чем троек, а код делится и на 3, и на 4. Придумайте код, открывающий сейф.

2222232

18. (*Математический праздник, 2004, 7.1*) Ваня задумал простое трёхзначное число, все цифры которого различны. На какую цифру оно может оканчиваться, если его последняя цифра равна сумме первых двух?

На 7

19. (*«Курчатов», 2015, 6.3*) В шестизначном числе первую и последнюю цифру заменили звёздочками: ∗2015∗. Известно, что число делится на 72. Восстановите число.

820152

20. (*Московская устная олимпиада, 2008, 7.3*) Мальвина попросила Буратино выписать все девятизначные числа, составленные из различных цифр. Буратино забыл, как пишется цифра 7, поэтому записал только те девятизначные числа, в которых этой цифры нет. Затем Мальвина предложила ему вычеркнуть из каждого числа по шесть цифр так, чтобы оставшееся трёхзначное число было простым. Буратино тут же заявил, что это возможно не для всех записанных чисел. Прав ли он?

21. (*Турнир Архимеда, 2016.4*) Известно, что сумма ТУРНИР + АРХИМЕДА кратна 2016. Докажите, что сумма ИР + АР кратна 9. (Цифры заменены буквами: разные цифры — разными буквами, одинаковые цифры — одинаковыми буквами)

22. (*Математический праздник, 1995, 7.5*) Из натурального числа вычли сумму его цифр, из полученного числа снова вычли сумму его (полученного числа) цифр и т.д. После одиннадцати таких вычитаний получился нуль. С какого числа начинали?

Любое число от 100 до 109

23. (*Математический праздник, 2011, 7.5*) В справочнике «Магия для чайников» написано:

> Замените в слове ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЕ одинаковые буквы на одинаковые цифры, а разные — на разные. Если полученное число окажется простым, случится настоящее землетрясение.

Возможно ли таким образом устроить землетрясение? (Натуральное число, большее 1, называется простым, если у него нет других делителей, кроме 1 и самого себя.)

Нет

24. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 7–8.6; 9.5*) Найдите наименьшее натуральное число N, такое, что число $99N$ состоит из одних троек.

3367