

Принцип Дирихле

1. (*Московская устная олимпиада, 2017, 7.2*) На кружок пришли четыре мальчика из 7А и четыре — из 7Б: три Лёши, три Вани и два Артёма. Могло ли оказаться так, что у каждого из них есть хотя бы один тезка-одноклассник, пришедший на кружок?
2. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017, 5–6.4, 7–8.5, 9.4*) В правильном 2017-угольнике провели все диагонали. Петя выбирает наугад какие-то N диагоналей. При каком наименьшем N среди выбранных диагоналей гарантированно найдутся две, имеющие одинаковую длину?
3. (*«Ломоносов», 2017, 5–6.5*) На окружности отмечено 25 точек, которые покрашены в красный или синий цвет. Некоторые точки соединены отрезками, причём у любого отрезка один конец синий, а другой — красный. Известно, что не существует двух красных точек, принадлежащих одинаковому количеству отрезков. Каково наибольшее возможное число красных точек?
4. (*«Ломоносов», 2017, 7–8.4*) На окружности отмечено 100 точек, которые покрашены в красный или синий цвет. Некоторые точки соединены отрезками, причём у любого отрезка один конец синий, а другой — красный. Известно, что не существует двух красных точек, принадлежащих одинаковому количеству отрезков. Каково наибольшее возможное число красных точек?
5. (*Математический праздник, 1994, 6.7*) Среди любых десяти из шестидесяти школьников найдётся три одноклассника. Обязательно ли среди всех шестидесяти школьников найдётся
 - а) 15 одноклассников;
 - б) 16 одноклассников?
6. (*Московская устная олимпиада, 2011, 7.3*) Убирая детскую комнату к приходу гостей, мама нашла 9 носков. Среди любых четырёх носков хотя бы два принадлежали одному ребёнку, а среди любых пяти носков не более трёх имели одного хозяина. Сколько могло быть детей и сколько носков могло принадлежать каждому ребёнку?
7. (*Математический праздник, 1994, 7.6*) В одной из школ 20 раз проводился кружок по астрономии. На каждом занятии присутствовало ровно пять школьников, причём никакие два школьника не встречались на кружке более одного раза. Докажите, что всего на кружке побывало не менее 20 школьников.