

# Признаки делимости

## Содержание

1	Всероссийская олимпиада школьников по математике . . . . .	1
2	Московская математическая олимпиада . . . . .	2
3	Олимпиада им. Леонарда Эйлера . . . . .	2
4	«Ломоносов» . . . . .	3
5	«Покори Воробьёвы горы!» . . . . .	3
6	«Физтех» . . . . .	3
7	«Курчатов» . . . . .	3

**0.1.** (Признак делимости на 4) Число  $\overline{abc\dots xyz}$  делится на 4 тогда и только тогда, когда число  $\overline{yz}$  делится на 4. Доказать.

**0.2.** (Признак делимости на 8) Число  $\overline{abc\dots xyz}$  делится на 8 тогда и только тогда, когда число  $\overline{xyz}$  делится на 8. Доказать.

**0.3.** (Признак делимости на 3 и 9) Число делится на 3 (на 9) тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3 (на 9). Доказать это: а) для трёхзначного числа  $\overline{abc}$ ; б) для произвольного числа  $\overline{a_1a_2\dots a_n}$ .

## 1 Всероссийская олимпиада школьников по математике

**1.1.** [Vse — 2017.S.11.6] Если на доске записано число  $A$ , то к нему можно прибавить любой его делитель, отличный от 1 и самого  $A$ . Можно ли из  $A = 4$  получить 1234321?

**1.2.** [Vse — 2007.R.8.6;10.5] В натуральном числе  $A$  переставили цифры, получив число  $B$ . Известно, что  $A - B = \underbrace{1\dots 1}_n$ . Найдите наименьшее возможное значение  $n$ .

**1.3.** [Vse — 2005.R.8.3;9.2] Даны 19 карточек. Можно ли на каждой из карточек написать ненулевую цифру так, чтобы из этих карточек можно было сложить ровно одно 19-значное число, кратное 11?

**1.4.** [Vse — 2014.R.9.6] Имеются 2013 карточек, на которых написана цифра 1, и 2013 карточек, на которых написана цифра 2. Вася складывает из этих карточек 4026-значное число. За один ход Петя может поменять местами некоторые две карточки и заплатить Васе 1 рубль. Процесс заканчивается, когда у Пети получается число, делящееся на 11. Какую наибольшую сумму может заработать Вася, если Петя стремится заплатить как можно меньше?

**1.5.** [Vse — 1993.R.9.2;10.2] Найдите наибольшее натуральное число, из которого вычёркиванием цифр нельзя получить число, делящееся на 11.

**1.6.** [Vse — 1998.R.9.3] Назовем десятизначное число *интересным*, если оно делится на 11111 и все его цифры различны. Сколько существует интересных чисел?

**1.7.** [Vse — 1995.F.9.5] Назовём натуральные числа *похожими*, если они записываются с помощью одного и того же набора цифр (например, для набора цифр 1, 1, 2 похожими будут числа 112, 121, 211). Докажите, что существуют такие три похожих 1995-значных числа, в записи которых нет нулей, что сумма двух из них равна третьему.

**1.8.** [Vse — 2016.F.9.5;10.5] Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 составлены девять (не обязательно различных) девятизначных чисел; каждая из цифр использована в каждом числе ровно один раз. На какое наибольшее количество нулей может оканчиваться сумма этих девяти чисел?

**1.9.** [Vse — 1996.F.9.5] Докажите, что в арифметической прогрессии с первым членом, равным 1, и разностью, равной 729, найдется бесконечно много членов, являющихся степенью числа 10.

**1.10.** [Vse — 2002.F.11.5] Найдите наименьшее натуральное число, представимое в виде суммы 2002 натуральных слагаемых с одинаковой суммой цифр и в виде суммы 2003 натуральных слагаемых с одинаковой суммой цифр.

## 2 Московская математическая олимпиада

**2.1.** [Mos — 1993.8.1] Обозначим через  $S(x)$  сумму цифр натурального числа  $x$ . Решить уравнения:

а)  $x + S(x) + S(S(x)) = 1993$ ;

б)  $x + S(x) + S(S(x)) + S(S(S(x))) = 1993$ .

**2.2.** [Mos — 2007.9.1] Номер нынешней олимпиады (70) образован последними цифрами года её проведения, записанными в обратном порядке. Сколько ещё раз повторится такая ситуация в этом тысячелетии?

**2.3.** [Mos — 2015.8.3] Миша заметил, что на электронном табло, показывающем курс доллара к рублю (4 цифры, разделенные десятичной запятой), горят те же самые четыре различные цифры, что и месяц назад, но в другом порядке. При этом курс вырос ровно на 20%. Приведите пример того, как такое могло произойти.

**2.4.** [Mos — 2015.11.2] В прошлом году Миша купил смартфон, который стоил целое четырёхзначное число рублей. Зайдя в магазин в этом году, он заметил, что цена смартфона выросла на 20% и при этом состоит из тех же цифр, но в обратном порядке. Какую сумму Миша потратил на смартфон?

**2.5.** [Mos — 1998.10.4] Существует ли натуральное число, делящееся на 1998, сумма цифр которого меньше 27?

### 3 Олимпиада им. Леонарда Эйлера

3.1. [Eul — 2014.F.6] Назовём натуральное число *гористым*, если в его записи есть не стоящая с краю цифра (называемая *вершиной*), которая больше всех остальных, а все остальные цифры ненулевые и сначала нестрого возрастают (то есть каждая следующая цифра больше предыдущей или равна ей) до вершины, а потом нестрого убывают (то есть каждая следующая цифра меньше предыдущей или равна ей). Например, число 12243 — гористое, а числа 3456 и 1312 — нет. Докажите, что сумма всех *стозначных* гористых чисел — составное число.

### 4 «Ломоносов»

4.1. («Ломоносов», 2011, 11) Найдите все двузначные числа вида  $\overline{xy}$ , если число, имеющее шестизначную десятичную запись  $\overline{64x72y}$ , кратно 72.

86 и 08

4.2. («Ломоносов», 2013, 7–9) Саша и Максим (от нечего делать) написали в клетках таблицы  $100 \times 100$  ненулевые цифры. После этого Саша сказал, что среди 100 чисел, образованных цифрами в каждой строке, все делятся на 9. На это Максим ответил, что среди 100 чисел, образованных цифрами в каждом столбце, ровно одно не делится на 9. Докажите, что кто-то из них ошибся.

### 5 «Покори Воробьёвы горы!»

5.1. («Покори Воробьёвы горы!», 2016, 7–9) Найдите наименьшее натуральное число  $N$ , такое, что число  $99N$  состоит из одних троек.

2988

### 6 «Физтех»

6.1. («Физтех», 2015, 10–11) Какую наименьшую сумму могут иметь девять последовательных натуральных чисел, если эта сумма оканчивается на 1234567?

81234567

6.2. («Физтех», 2012, 9–10) Найдите число  $\overline{ab}$ , если известно, что число

$$\overbrace{2011 \dots 2011}^{101 \text{ раз}} a 2011 b \overbrace{2011 \dots 2011}^{101 \text{ раз}}$$

делится на 99.

19

### 7 «Курчатов»

7.1. («Курчатов», 2014, 9–10) Дано натуральное число, кратное 495. Между его цифрами вставили два нуля подряд. Докажите, что полученное число тоже делится на 495.