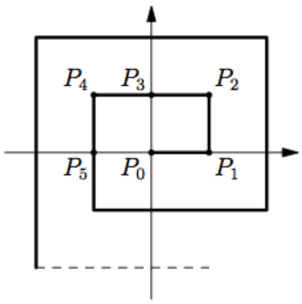
Последовательности

1. (*«Курчатов», 2017, 9.1*) Муравей Боря двигается по координатной плоскости, стартуя из точки $P_0 = (0, 0)$, двигаясь к точке $P_1 = (1, 0)$, и далее по спирали против часовой стрелки (рис.).



Точки с целочисленными координатами, в которые он попадает, образуют последовательность P_n. Найдите координаты точки P_{1557}.

$\boxed{(20, 17)}$

2. (*Турнир городов, 2015, 8–9*) Петя сложил 10 последовательных степеней двойки, начиная с некоторой, а Вася сложил некоторое количество последовательных натуральных чисел, начиная с 1. Могли ли они получить один и тот же результат?

$\boxed{\text{Да}}$

3. (*Турнир городов, 2017, 8–11*) Взяли несколько положительных чисел и построили по ним такую последовательность: a_1 — сумма исходных чисел, a_2 — сумма квадратов исходных чисел, a_3 — сумма кубов исходных чисел, и т. д.

а) Могло ли случиться, что до a_5 последовательность убывает ($a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5$), а начиная с a_5 — возрастает ($a_5 < a_6 < a_7 < \ldots$)?

б) А могло ли случиться наоборот: до a_5 последовательность возрастает, а начиная с a_5 — убывает?

4. (*Турнир городов, 2015, 10–11*) Петя сложил 100 последовательных степеней двойки, начиная с некоторой, а Вася сложил некоторое количество последовательных натуральных чисел, начиная с 1. Могли ли они получить один и тот же результат?

$\boxed{\text{Да}}$

5. (*Турнир городов, 2015, 8–11*) Дано $2n+1$ число (n — натуральное), среди которых одно число равно 0, два числа равны 1, два числа равны 2, …, два числа равны n. Для каких n эти числа можно записать в одну строку так, чтобы для каждого натурального m от 1 до n между двумя числами, равными m, было расположено ровно m других чисел?

$\boxed{\text{Для любых}}$

6. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 9*) Последовательность чисел задана следующим образом: $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ и $a_{n+1} = 4(a_n - a_{n-1})$ при $n \geqslant 2$. Найдите наименьший положительный член последовательности, кратный 2014. В ответе укажите номер этого члена.

1008

7. (*Всеросс., 2015, РЭ, 9*) Петя хочет выписать все возможные последовательности из 100 натуральных чисел, в каждой из которых хотя бы раз встречается тройка, а любые два соседних члена различаются не больше, чем на 1. Сколько последовательностей ему придётся выписать?

$3^{100} - 2^{100}$

8. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 9*) Аня не сказала Мише, сколько ей лет, но сообщила, что на каждый её день рождения мама бросает в копилку столько монет, сколько лет исполняется Ане. Миша оценил, что в копилке не менее 110, но не более 130 монет. Сколько же лет Ане?

15

9. (*ОММО, 2015, 9–11*) Сумма первых тринадцати членов некоторой арифметической прогрессии составляет 50% от суммы последних тринадцати членов этой прогрессии. Сумма всех членов этой прогрессии без первых трёх членов относится к сумме всех членов без последних трёх как 5 : 4. Найдите количество членов этой прогрессии.

22

10. (*Всеросс., 2014, МЭ, 10*) Первый член последовательности равен 934. Каждый следующий равен сумме цифр предыдущего, умноженной на 13. Найдите 2013-й член последовательности.

130

11. (*«Физтех», 2016, 10*) Найдите все значения p, при каждом из которых числа $4p + 5$, $2p$ и $|p - 3|$ являются соответственно первым, вторым и третьим членами некоторой геометрической прогрессии.

-1; $\frac{15}{8}$

12. (*ММО, 2015, 10*) По целому числу a построим последовательность

$$a_1 = a, \quad a_2 = 1 + a_1, \quad a_3 = 1 + a_1 a_2, \quad a_4 = 1 + a_1 a_2 a_3, \quad \ldots$$

(каждое следующее число на 1 превосходит произведение всех предыдущих). Докажите, что разности её соседних членов $(a_{n+1} - a_n)$ — квадраты целых чисел.

13. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11*) Дана бесконечная числовая последовательность $a_1, a_2, \ldots,$ о которой известно следующее: $a_1 = 20$, $a_{n+1} = a_n a_{n+2}$, $n \in \mathbb{N}$. Найдите все значения, которые может принимать a_{2014}.

0 или 1/20

14. (*«Высшая проба», 2016, 10–11*) Три различных положительных числа являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии. Могут ли эти же три числа оказаться тремя (не обязательно последовательными) членами геометрической прогрессии?

Да

15. (*«Покори Воробъёвы горы!», 2015, 10–11*) Две арифметические прогрессии содержат по 2015 членов каждая. Отношение последнего члена первой прогрессии к первому члену второй равно отношению последнего члена второй прогрессии к первому члену первой и равно 4. Отношение суммы всех членов первой прогрессии к сумме всех членов второй равно 2. Найдите отношение разностей этих прогрессий и приведите пример таких прогрессий.

$\boxed{26}$

16. (*«Покори Воробъевы горы!», 2014, 10–11*) Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии b_1, b_2, b_3, … равна 70, сумма квадратов членов этой прогрессии равна 2100. Найдите сумму новой бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой первый член равен $(-b_1)$, а знаменатель отличается от знаменателя исходной геометрической прогресии только знаком.

$\boxed{-30}$

17. (*«Покори Воробъёвы горы!», 2013, 10–11*) Несколько чисел образуют арифметическую прогрессию, причём их сумма равна 63, а первый член в полтора раза больше разности прогрессии. Если все члены прогрессии уменьшить на одну и ту же величину так, чтобы первый член прогрессии был равен разности прогрессии, то сумма всех чисел уменьшится не более, чем на 8, но не менее, чем на 7. Определите, какой может быть разность этой прогрессии.

$\boxed{2 \text{ или } 21/8}$

18. (*«Покори Воробъёвы горы!», 2017, 10–11*) Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если её второй член равен 3, а сумма первых трёх её членов равна 13.

$\boxed{\frac{27}{2}}$

19. (*«Покори Воробъёвы горы!», 2012, 10–11*) Найдите сумму общих членов прогрессий 12, 15, 18, … и 1, 3, 9, …, если в каждой из них 100 членов.

$\boxed{351}$

20. (*«Покори Воробъевы горы!», 2011, 10–11*) Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если сумма её членов, взятых через один, начиная со второго, равна 2, а сумма её членов, взятых через один, начиная с третьего, равна 1.

$\boxed{6}$

21. (*«Ломоносов», 2012, 10–11*) Найдите первый член арифметической прогрессии a_1, a_2, …, если $a_{13} = 0$, а произведение чисел 5^{a_1}, 5^{a_2}, …, $5^{a_{24}}$ равно их среднему арифметическому.

$\boxed{0}$

22. (*«Покори Воробъевы горы!», 2012, 10–11*) Найдите все положительные значения параметра a, при которых среди чисел последовательности

$$x_n = -n^2 + 10n + 22 + \frac{10}{|5n-31| + a}\,, \quad n = 1,\, 2,\, \ldots$$

есть ровно два максимальных элемента.

$\boxed{4}$

23. (*Всеросс., 2015, ШЭ, 11*) Числа $\frac{1}{a+b}$, $\frac{1}{a+c}$, $\frac{1}{b+c}$ образуют арифметическую прогрессию. Верно ли, что числа a^2, b^2, c^2 также образуют арифметическую прогрессию?

Да

24. (*ОММО, 2014*) В бесконечной числовой последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ не все члены равны между собой. Для всех $n \geqslant 2$ выполняется равенство

$$x_n = \frac{x_{n-1} + x_n + x_{n+1}}{3}.$$

Найдите отношение $\dfrac{x_{2012} - x_{1006}}{x_{1006} - x_{503}}$.

2

25. (*ММО, 2015, 11*) Последовательность (a_n) такова, что $a_n = n^2$ при $1 \leqslant n \leqslant 5$ и при всех натуральных n выполнено равенство $a_{n+5} + a_{n+1} = a_{n+4} + a_n$. Найдите a_{2015}.

26. (*ОММО, 2009*) Третий, четвёртый, седьмой и последний члены непостоянной арифметической прогрессии образуют геометрическую прогрессию. Найдите число членов этой арифметической прогрессии.

16

27. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 10–11*) Сумма пяти первых членов геометрической прогрессии равна 93, а сумма следующих пяти членов равна 2976. Найдите сумму первых семи членов прогрессии.

381

28. (*«Ломоносов», 2010*) Числа 24 и 2187 являются членами геометрической прогрессии. Найдите все натуральные числа, которые могут встретиться в этой прогрессии.

24, 108, 486, 2187

29. (*Всеросс., 2015, МЭ, 11*) На экране компьютера сгенерирована некоторая конечная последовательность нулей и единиц. С ней можно производить следующую операцию: набор цифр «01» заменять на набор цифр «1000». Может ли такой процесс замен продолжаться бесконечно или когда-нибудь он обязательно прекратится?

Обязательно прекратится

30. (*Турнир городов, 2016, 10–11*) Геометрическая прогрессия состоит из 37 натуральных чисел. Первый и последний члены прогрессии взаимно просты. Докажите, что 19-й член прогрессии является 18-й степенью натурального числа.

31. (*ММО, 2017, 11.1*) Даны две непостоянные прогрессии (a_n) и (b_n), одна из которых арифметическая, а другая — геометрическая. Известно, что $a_1 = b_1$, $a_2 : b_2 = 2$ и $a_4 : b_4 = 8$. Чему может быть равно отношение $a_3 : b_3$?

32. (*Всеросс., 2015, РЭ, 11*) Петя хочет выписать все возможные последовательности из 100 натуральных чисел, в каждой из которых хотя бы раз встречается число 4 или 5, а любые два соседних члена различаются не больше, чем на 2. Сколько последовательностей ему придётся выписать?

$\boxed{5^{100} - 3^{100}}$

33. (*Турнир городов, 2016, 10–11*) Дана бесконечно возрастающая арифметическая прогрессия. Первые её несколько членов сложили и сумму объявили первым членом новой последовательности, затем сложили следующие несколько членов исходной прогрессии и сумму объявили вторым членом новой последовательности, и так далее. Могла ли новая последовательность оказаться геометрической прогрессией?

$\boxed{\text{Да}}$

34. (*Всеросс., 2017, РЭ, 9.8*) Изначально на стол положили 100 карточек, на каждой из которых записано по натуральному числу; при этом было ровно 43 карточки с нечётными числами. Затем каждую минуту проводилась следующая процедура. Для каждых трёх карточек, лежащих на столе, вычислялось произведение записанных на них чисел, все эти произведения складывались, и полученное число записывалось на новую карточку, которая добавлялась к лежащим на столе. Через год после начала процесса выяснилось, что на столе есть карточка с числом, кратным 2^{10000}. Докажите, что число, кратное 2^{10000}, было на одной из карточек уже через день после начала.

35. (*Всеросс., 2017, РЭ, 11.8*) Изначально на стол кладут 100 карточек, на каждой из которых записано по натуральному числу; при этом среди них ровно 28 карточек с нечётными числами. Затем каждую минуту проводится следующая процедура. Для каждых 12 карточек, лежащих на столе, вычисляется произведение записанных на них чисел, все эти произведения складываются, и полученное число записывается на новую карточку, которая добавляется к лежащим на столе. Можно ли выбрать исходные 100 чисел так, что для любого натурального d на столе рано или поздно появится карточка с числом, кратным 2^d?

36. (*Всеросс., 2017, финал, 9.4*) Существует ли такая бесконечная возрастающая последовательность a_1, a_2, a_3, … натуральных чисел, что сумма любых двух различных членов последовательности взаимно проста с суммой любых трёх различных членов последовательности?