Многочлены

Содержание

1 Всероссийская олимпиада школьников по математике

1. (*Всеросс., 2015, МЭ, 10*) Докажите, что если в выражении $(x^2 - x + 1)^{2014}$ раскрыть скобки и привести подобные слагаемые, то какой-нибудь коэффициент полученного многочлена будет отрицательным.

2. (*Всеросс., 2017, РЭ, 10.4, 11.3*) Учитель собирается дать детям задачу следующего вида. Он сообщит им, что он задумал многочлен $P(x)$ степени 2017 с целыми коэффициентами, старший коэффициент которого равен 1. Затем он сообщит им k целых чисел n_1, n_2, ..., n_k и отдельно сообщит значение выражения $P(n_1)P(n_2)\ldots P(n_k)$. По этим данным дети должны найти многочлен, который мог бы задумать учитель. При каком наименьшем k учитель сможет составить задачу такого вида так, чтобы многочлен, найденный детьми, обязательно совпал бы с задуманным?

3. (*Всеросс., 2017, финал, 10.6, 11.5*) Пусть $P(x)$ — многочлен степени $n \geqslant 2$ с неотрицательными коэффициентами, а a, b и c — длины сторон некоторого остроугольного треугольника. Докажите, что числа $\sqrt[n]{P(a)}$, $\sqrt[n]{P(b)}$ и $\sqrt[n]{P(c)}$ также являются длинами сторон некоторого остроугольного треугольника.

4. (*Всеросс., 2016, финал, 10.3*) Дан кубический многочлен $f(x)$. Назовём *циклом* тройку различных чисел (a, b, c) таких, что $f(a) = b$, $f(b) = c$ и $f(c) = a$. Известно, что нашлись восемь циклов (a_i, b_i, c_i), $i = 1, 2, \ldots, 8$, в которых участвуют 24 различных числа. Докажите, что среди восьми чисел вида $a_i + b_i + c_i$ есть хотя бы три различных.

5. (*Всеросс., 2014, РЭ, 11.7*) Дан многочлен

$$P(x) = a_{2n}x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \ldots + a_1x + a_0,$$

у которого каждый коэффициент a_i принадлежит отрезку $[100; 101]$. При каком минимальном n у такого многочлена может найтись действительный корень?

6. (*Всеросс., 2005, ФОЭ, 11.5*) Докажите, что для любого многочлена P с целыми коэффициентами и любого натурального k существует такое натуральное n, что $P(1) + P(2) + \ldots + P(n)$ делится на k.

7. (*Всеросс., 2006, ФОЭ, 11.2*) Произведение квадратных трёхчленов

$$x^2+a_1x+b_1,\quad x^2+a_2x+b_2,\quad \ldots,\quad x^2+a_nx+b_n$$

равно многочлену

$$P(x)=x^{2n}+c_1x^{2n-1}+c_2x^{2n-2}+\ldots+c_{2n-1}x+c_{2n},$$

где коэффициенты c_1, c_2, …, c_{2n} положительны. Докажите, что для некоторого k $(1\leqslant k\leqslant n)$ коэффициенты a_k и b_k положительны.

8. (*Всеросс., 2004, ФОЭ, 11.3*) Пусть многочлен $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$ имеет хотя бы один действительный корень и $a_0\neq 0$. Докажите, что, последовательно вычеркивая в некотором порядке одночлены в записи $P(x)$, можно получить из него число a_0 так, чтобы каждый промежуточный многочлен также имел хотя бы один действительный корень.

9. (*Всеросс., 2013, финал, 11.1*) Даны многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ десятой степени, старшие коэффициенты которых равны 1. Известно, что уравнение $P(x)=Q(x)$ не имеет действительных корней. Докажите, что уравнение $P(x+1)=Q(x-1)$ имеет хотя бы один действительный корень.

10. (*Всеросс., 2008, финал, 9.2, 11.1*) Числа a, b, c таковы, что уравнение $x^3+ax^2+bx+c=0$ имеет три действительных корня. Докажите, что если $-2\leqslant a+b+c\leqslant 0$, то хотя бы один из этих корней принадлежит отрезку $[0;2]$.

11. (*Всеросс., 2016, финал, 11.5*) Пусть n — натуральное число. На $2n+1$ карточках написано по ненулевому целому числу; сумма всех чисел также ненулевая. Требуется этими карточками заменить звёздочки в выражении $*x^{2n}+*x^{2n-1}+\ldots+*x+*$ так, чтобы полученный многочлен не имел целых корней. Обязательно ли это можно сделать?

12. (*Всеросс., 2012, финал, 11.5*) Даны многочлен $P(x)$ и такие числа a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, что $a_1a_2a_3\neq 0$. Оказалось, что

$$P(a_1x+b_1)+P(a_2x+b_2)=P(a_3x+b_3)$$

для любого действительного x. Докажите, что $P(x)$ имеет хотя бы один действительный корень.

13. (*Всеросс., 2011, финал, 11.5*) Даны два различных приведённых кубических многочлена $F(x)$ и $G(x)$. Выписали все корни уравнений $F(x)=0$, $G(x)=0$, $F(x)=G(x)$. Оказалось, что выписаны 8 различных чисел. Докажите, что наибольшее и наименьшее из них не могут одновременно являться корнями многочлена $F(x)$.

14. (*Всеросс., 2007, финал, 11.6*) Существуют ли такие ненулевые числа a, b, c, что при любом $n>3$ можно найти многочлен вида $P_n(x)=x^n+\ldots+ax^2+bx+c$, имеющий ровно n (не обязательно различных) целых корней?

15. (*Всеросс., 2004, финал, 11.3*) Даны многочлены $P(x)$, $Q(x)$. Известно, что для некоторого многочлена $R(x,y)$ выполняется равенство $P(x)-P(y)=R(x,y)(Q(x)-Q(y))$. Докажите, что существует такой многочлен $S(x)$, что $P(x)=S(Q(x))$.

16. (*Всеросс., 2014, финал, 11.7*) Исходно на доске написаны многочлены x^3-3x^2+5 и x^2-4x. Если на доске уже написаны многочлены $f(x)$ и $g(x)$, разрешается дописать на неё многочлены $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $f(g(x))$ и $cf(x)$, где c — произвольная (не обязательно целая) константа. Может ли на доске после нескольких операций появиться ненулевой многочлен вида x^n-1?

17. (*Всеросс., 2006, финал, 11.7*) Известно, что многочлен $(x+1)^n-1$ делится на некоторый многочлен $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + c_{k-2}x^{k-2} + \ldots + c_1x + c_0$ чётной степени k, у которого все коэффициенты — целые нечётные числа. Докажите, что n делится на $k+1$.

18. (*Всеросс., 2015, финал, 11.4*) Дано натуральное число $N \geqslant 3$. Назовём набор из N точек на координатной плоскости *допустимым*, если их абсциссы различны, и каждая из этих точек окрашена либо в красный, либо в синий цвет. Будем говорить, что многочлен $P(x)$ *разделяет* допустимый набор точек, если либо выше графика $P(x)$ нет красных точек, а ниже — нет синих, либо наоборот (на самом графике могут лежать точки обоих цветов). При каком наименьшем k любой допустимый набор из N точек можно разделить многочленом степени не более k?

19. (*Всеросс., 2010, финал, 11.4*) Дано натуральное число $n \geqslant 3$. При каком наименьшем k верно следующее утверждение? Для любых n точек $A_i = (x_i, y_i)$ на плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой, и любых вещественных чисел c_i ($1 \leqslant i \leqslant n$) существует такой многочлен $P(x,y)$, степень которого не больше k, что $P(x_i, y_i) = c_i$ при всех $i = 1, \ldots, n$.

(Многочленом от двух переменных называется функция вида

$$P(x,y) = a_{0,0} + a_{1,0}x + a_{0,1}y + a_{2,0}x^2 + a_{1,1}xy + a_{0,2}y^2 + \ldots + a_{k,0}x^k + a_{k-1,1}x^{k-1}y + \ldots + a_{0,k}y^k.$$

Степенью ненулевого одночлена $a_{i,j}x^iy^j$ называется число $i+j$; степенью многочлена $P(x,y)$ называется наибольшая степень входящего в него одночлена.)

2 Московская математическая олимпиада

20. (*ММО, 2015, 9–10*) Существуют ли два многочлена с целыми коэффициентами такие, что у каждого из них есть коэффициент, модуль которого больше 2015, но у произведения этих двух многочленов модули всех коэффициентов не превосходят 1?

21. (*ММО, 2016, 11*) Про приведённый многочлен $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ с действительными коэффициентами известно, что при некотором натуральном $m \geqslant 2$ многочлен $\underbrace{P(P(\ldots P}_{m\text{ раз}}(x)\ldots))$ имеет действительные корни, причём только положительные. Обязательно ли сам многочлен $P(x)$ имеет действительные корни, причём только положительные?

22. (*ММО, 2014, 10–11*) Многочлен $P(x)$ удовлетворяет условиям:

$$P(0) = 1, \quad (P(x))^2 = 1 + x + x^{100}Q(x),$$

где $Q(x)$ — некий многочлен. Докажите, что коэффициент при x^{99} в многочлене $(P(x)+1)^{100}$ равен нулю.

3 Турнир городов

23. (*Турнир городов, 2016, 10–11*) Все коэффициенты некоторого непостоянного многочлена целые и по модулю не превосходят 2015. Докажите, что любой положительный корень этого многочлена больше чем 1/2016.

4 «Покори Воробьёвы горы!»

24. (*«Покори Воробъёвы горы!», 2013, 8*) Учитель написал на доске многочлены с целыми коэффициентами:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad \text{и} \quad Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

и дал задание найти целое значение x, такое, что $P(x)$ делится (нацело) на $Q(x)$. Петя Васечкин взялся за дело и, взяв для начала $x = 0$, получил $P(0) = 4$, $Q(0) = 3$. «Не делится», — подумал Петя, и решил подставить $x = 1$. Получилось $P(1) = -137$, $Q(1) = 0$. «На ноль делить нельзя», — подумал Петя. Он попробовал взять $x = 2$, но там получались большие числа и Петя запутался в вычислениях. Напоследок он решил попробовать взять $x = -1$ и получил $P(-1) = 137$, $Q(-1) = -6$. «Да таких значений x просто не существует!» — воскликнул Петя. Прав ли он?

$\boxed{\text{Да}}$

25. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2013, 9*) Найдите a и b такие, что многочлен $x^{2013} + x^{99} + ax + b$ делится нацело на $x^2 - x + 1$.

$\boxed{a = 0,\ b = 2}$

5 «Ломоносов»

26. (*«Ломоносов», 2014, 8–9*) Многочлен $a_{2014}x^{2014} + a_{2013}x^{2013} + a_1 x + a_0$ при всех значениях x совпадает с функцией

$$y = \frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-2014)}{2014!}.$$

Найдите сумму чисел $a_2 + a_4 + \ldots + a_{2014}$.

$\boxed{1006{,}5}$

6 «Высшая проба»

27. (*«Высшая проба», 2013, 9*) Триномом степени p называется функция вида $f(x) = x^p + ax^q + 1$, где p, q — натуральные числа, $q < p$, и a — произвольное вещественное число (быть может, равное нулю). Найдите все разложения многочлена $x^{12} + 1$ в произведение пары триномов.

$\boxed{(x^4+1)(x^8-x^4+1),\ \left(x^6-\sqrt{2}x^3+1\right)\left(x^6+\sqrt{2}x^3+1\right)}$

28. (*«Высшая проба», 2013, 11*) Триномом степени p называется функция вида

$$f(x) = x^p + ax^q + 1,$$

где p, q — натуральные числа, $q < p$, и a — произвольное вещественное число (быть может, равное нулю). Найдите все пары триномов, которые дают в произведении трином степени 15.

$\boxed{(1 + x^5)(1 - x^5 + x^{10}),\ (1 - x^3 + x^9)(1 + x^3 + x^6),\ (1 - x^6 + x^9)(1 + x^3 + x^6)}$

7 «Курчатов»

29. (*«Курчатов», 2015, 10*) $f(x) = x^3 - 4x$, $g(x) = x^3 - 4x^2 + 1$. Докажите, что при любом $a > 0$ многочлен $af + g$ имеет не менее трёх различных корней.

30. (*«Курчатов», 2015, 11*) $f(x) = x^3 - 9x$, $g(x) = x^3 - 5x^2 + 1$. Докажите, что если $b > 0$, то у многочлена $f + bg$ есть не менее трёх различных действительных корней.