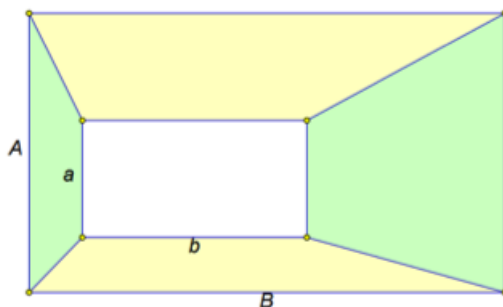


Планиметрия на олимпиаде «Покори Воробьёвы горы!»

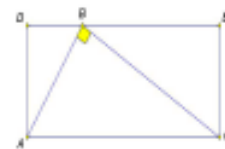
1. («Покори Воробьёвы горы!», 2015, 8) Внутри большого прямоугольника размером $A \times B$ расположен маленький прямоугольник размером $a \times b$ (см. рисунок).



Найдите разность между суммарной площадью жёлтых и суммарной площадью зелёных четырёхугольников.

$Ab - Ba$

2. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 7–9) Около прямоугольного треугольника ABC с катетами $AB = 5$ и $BC = 6$ описали прямоугольник $ADEC$, как показано на рисунке. Какова площадь $ADEC$?



03

3. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 7–9) В трапеции $ABCD$ с основаниями $AD \parallel BC$ диагонали пересекаются в точке E . Известны площади $S(\triangle ADE) = 12$ и $S(\triangle BCE) = 3$. Найдите площадь трапеции.

27

4. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 8–9) В трапеции известны длины диагоналей — 6 и 8, а также длина средней линии — 5. Найдите высоту трапеции.

4,8

5. («Покори Воробьёвы горы!», 2015, 8–9) В четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $AB = BC$, $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$. Из вершины B опущен перпендикуляр BH на сторону AD . Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если известно, что $BH = h$.

24

6. («Покори Воробьёвы горы!», 2015, 8) В трапеции диагонали пересекаются под прямым углом и одна из них равна средней линии. Определите, какой угол образует эта диагональ с основаниями трапеции.

09

7. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 8–9) В треугольнике ABC известны стороны $AB = 5$ и $AC = 6$. Какой должна быть сторона BC , чтобы угол ACB был максимально возможным?

11^

8. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 8–9) Петя хотел нарисовать правильный треугольник ABC . Но, поскольку он рисовал неточно, получился треугольник с углами $\angle A = 59^\circ$ и $\angle B = 63^\circ$. Потом Петя провёл высоты CE и BD , но, поскольку угольник был слегка перекошен, получил углы $\angle ADB = \angle AEC = 92^\circ$. Найдите градусную меру угла AED .

89

9. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 9) В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC известен угол BCD , равный 120° . В этот угол вписана окружность радиуса 1, проходящая через точки A , B и D . Найдите площадь треугольника ABD .

9^

10. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 9) Марк Уотни испытывает на прочность новый купол, предназначенный для экспедиции на Марс. Купол выполнен в форме полусферы радиуса 20 м. Марк поворачивается на север и стреляет под углом 45° к земле, потом поворачивается на юг и тоже стреляет под углом 45° (см. рис). Какие значения может принимать $|P_1P_2|$ — расстояние между точками попадания?



20^2

11. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 9) На диаметре AB выбрана точка M . Точки C и D , лежащие на окружности по одну сторону от AB , выбраны так, что $\angle AMC = \angle BMD = 30^\circ$. Найдите диаметр окружности, если известно, что $CD = 12$.

8^

12. («Покори Воробьёвы горы!», 2016, 9) Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами $BC = 30$ и $AC = 40$. На сторонах AB , BC и CA выбраны точки C_1 , A_1 , B_1 соответственно так, что $AC_1 = BA_1 = CB_1 = 1$. Найдите площадь треугольника $A_1B_1C_1$.

554,2

13. («Покори Воробьёвы горы!», 2016, 9) В трапеции $KLMN$ известны основания $KN = 25$, $LM = 15$ и боковые стороны $KL = 6$, $MN = 8$. Найдите длину отрезка, соединяющего середины оснований.

9

14. («Покори Воробьёвы горы!», 2016, 9) Окружность с диаметром AB пересекает отрезки AC и BC в точках M и N соответственно, причём длина отрезка MN равна радиусу окружности. Найдите площадь четырехугольника $ABNM$, если известно, что $AC = 12$ и $BC = 8$.

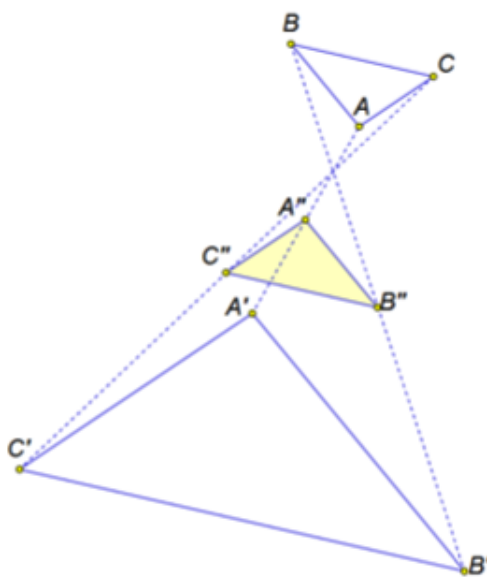
18^

15. («Покори Воробьёвы горы!», 2015, 9) В треугольник ABC вписана окружность с центром O , к которой проведена касательная, пересекающая стороны AC и AB в точках M и N соответственно. Найдите угол A треугольника ABC , если $\angle MON = 26^\circ$.

1281

16. («Покори Воробьёвы горы!», 2015, 9) Даны треугольники ABC и $A'B'C'$, площади которых равны 1 и 2025 соответственно. Известно, что лучи AB и $A'B'$ параллельны и идут в противоположных направлениях (см. рисунок). То же верно и для пар BC и $B'C'$, CA и $C'A'$. Точки A'' , B'' и C'' — середины отрезков AA' , BB' и CC' . Найдите площадь треугольника $A''B''C''$.

484



17. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 10–11) Медиана AM треугольника ABC перпендикулярна его биссектрисе BL . Найдите площадь треугольника ABM , если площадь треугольника ABL равна 10.

151

18. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 10–11) Продолжение биссектрисы AD треугольника ABC пересекает окружность, описанную вокруг этого треугольника, в точке E . Найдите площадь треугольника ABC , если $BC = a$, $\angle BAC = \alpha$, $AE = d$.

$$\frac{a}{2} \sin \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{2} \cos \alpha \right)$$

19. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 10–11) В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведена высота CK . Периметр треугольника ABC равен 13, а периметр треугольника BCK равен 5. Найдите периметр треугольника ACK .

121

20. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 10–11) В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC и $\angle ABC = \frac{\pi}{9}$ на стороне AB выбрана точка D так, что $BD = AC$. Найдите величину угла DCB (в радианах) и сравните её с 0,18.

$$0,18 > \frac{81}{\pi}$$

21. («Покори Воробьёвы горы!», 2016, 10–11) Серединами оснований BC и AD трапеции $ABCD$ являются точки K и L соответственно. Известно, что $AD = 10 \cdot BC$. На боковых сторонах AB и CD взяты соответственно точки M и N так, что прямая MN параллельна основаниям трапеции. При каком значении отношения $AM : MB$ сумма площадей треугольников BKN и MNL будет наибольшей?

19 : 61

22. («Покори Воробьёвы горы!», 2016, 10–11) В окружность с центром O вписан четырёхугольник $ABCD$, диагонали AC и BD которого пересекаются в точке M , причём $AM = 4$, $AB = 6$. Определите, какой может быть наименьшая длина диагонали BD , если известно, что стороны AB и AD равноудалены от точки O .

4^5

23. («Покори Воробьёвы горы!», 2016, 10–11) На сторонах AB и BC треугольника ABC расположены точки M и N соответственно. При этом $AM : MB = 3 : 1$, $CN : NB = 1 : 7$. Какой процент от площади четырёхугольника $AMNC$ составляет площадь треугольника MBN ?

%82

24. («Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11) Окружности с центрами в точках O_1 и O_2 пересекаются внешним образом в точках A и B (то есть точки O_1 и O_2 лежат по разные стороны от прямой AB). Известно, что $\angle AO_1B = \alpha$, $\angle AO_2B = \beta$ и $O_1O_2 = a$. Найдите радиусы окружностей.

$$\frac{a \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = r_1, \frac{a \sin \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} = r_2$$

25. («Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11) Окружность касается одной из сторон угла с вершиной A в точке B и пересекает вторую сторону в точках C и D , причём AD в три раза меньше AC . Косинус угла A равен $\sqrt{3}/4$.

- Найдите отношение $BC : BD$.
- Найдите отношение радиуса окружности к BD .

1/3^2 (9 : 3^2)

26. («Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11) В четырёхугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 2$, $BC = 4$, $CD = 5$ вписали окружность и вокруг него описали окружность. Найдите площадь четырёхугольника.

2^3/30

27. («Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11) Города A , B , C , D , E лежат на одной окружности и попарно соединены прямолинейными дорогами. Два велосипедиста выехали одновременно из A в D и из C в E , повстречавшись в пути. Затем они выехали одновременно из D в B и из E в C , опять повстречавшись в пути. Наконец, они выехали одновременно из B в E и из C в B , прибыв в пункты назначения одновременно. Найдите BC , если $AE = 2$ км и $CD = 4$ км, а скорость каждого велосипедиста постоянна.

16 км

28. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11) В треугольнике ABC стороны AB и BC равны соответственно 3 и 1. Биссектриса BD равна $\sqrt{2}$. Найдите угол BAC .

$\frac{\xi^{\wedge}\xi}{\xi}$ сооде

29. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11) В треугольнике ABC биссектрисы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O . Известно, что $2 \cdot AO = 7 \cdot OA_1$, $BO = 2 \cdot OB_1$. Найдите отношение высоты, опущенной из точки A , к радиусу вписанной в треугольник ABC окружности.

$\frac{7}{6}$

30. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11) Треугольник ABC вписан в окружность с центром в точке O . Биссектрисы внутренних углов треугольника при вершинах A и B пересекают описанную окружность в точках A_1 и B_1 соответственно. Угол между биссектрисами равен 60° . Длина стороны AB равна 3. Найдите площадь треугольника A_1B_1O .

$\frac{7}{\xi^{\wedge}\xi}$

31. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11) В четырёхугольнике $ABCD$ вписана окружность с центром O , при этом $\angle AOB = 75^\circ$, $AB = 3$. Найдите площадь круга, ограниченного описанной вокруг треугольника ABE окружностью, где E — точка пересечения прямых AD и BC .

$\frac{7}{6}$

32. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11) Косинус острого угла прямоугольного треугольника равен $2/\sqrt{5}$. Через середины одного катета и гипотенузы провели окружность, касающуюся другого катета. Найдите отношение части гипотенузы, лежащей внутри получившегося круга, ко всей гипотенузе.

$\frac{07}{11}$ или $\frac{9}{2}$

33. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11) Окружность радиуса 1 проходит через вершины A и B треугольника ABC и пересекает стороны AC и BC в точках M и K соответственно. Найдите площадь треугольника ABC , если $AB = \sqrt{3}$, $MK = 1$, а центр окружности находится внутри треугольника ABC на расстоянии 5 от точки C .

$\frac{\xi^{\wedge}9}{\xi}$

34. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11) В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой. На стороне AC как на диаметре построена окружность. Из вершины B проведена касательная к окружности, отличная от BC , и D — точка касания. Точка H является основанием перпендикуляра, проведённого из точки D на сторону AC . Найдите отношение $DH : EH$, где E — точка пересечения DH и AB .

$\frac{2}{2}$