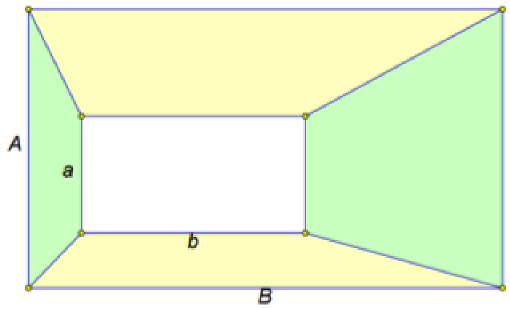
Планиметрия на олимпиаде «Покори Воробьёвы горы!»

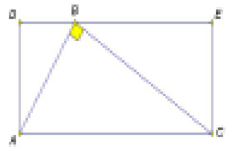
1. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015, 8*) Внутри большого прямоугольника размером $A \times B$ расположен маленький прямоугольник размером $a \times b$ (см. рисунок).



Найдите разность между суммарной площадью жёлтых и суммарной площадью зелёных четырёхугольников.

$\boxed{Ab - Ba}$

2. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017, 7–9*) Около прямоугольного треугольника ABC с катетами $AB = 5$ и $BC = 6$ описали прямоугольник $ADEC$, как показано на рисунке. Какова площадь $ADEC$?



$\boxed{30}$

3. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017, 7–9*) В трапеции $ABCD$ с основаниями $AD \parallel BC$ диагонали пересекаются в точке E. Известны площади $S(\triangle ADE) = 12$ и $S(\triangle BCE) = 3$. Найдите площадь трапеции.

$\boxed{27}$

4. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017, 8–9*) В трапеции известны длины диагоналей — 6 и 8, а также длина средней линии — 5. Найдите высоту трапеции.

$\boxed{4{,}8}$

5. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015, 8–9*) В четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $AB = BC$, $\angle ABC = \angle ADC = 90°$. Из вершины B опущен перпендикуляр BH на сторону AD. Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если известно, что $BH = h$.

$\boxed{h^2}$

6. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015, 8*) В трапеции диагонали пересекаются под прямым углом и одна из них равна средней линии. Определите, какой угол образует эта диагональ с основаниями трапеции.

$\boxed{60°}$

7. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 8–9*) В треугольнике ABC известны стороны $AB = 5$ и $AC = 6$. Какой должна быть сторона BC, чтобы угол ACB был максимально возможным?

$\boxed{\sqrt{11}}$

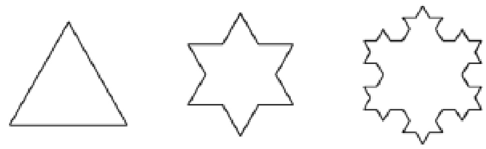
8. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 8–9*) Петя хотел нарисовать правильный треугольник ABC. Но, поскольку он рисовал неточно, получился треугольник с углами $\angle A = 59°$ и $\angle B = 63°$. Потом Петя провёл высоты CE и BD, но, поскольку угольник был слегка перекошен, получил углы $\angle ADB = \angle AEC = 92°$. Найдите градусную меру угла AED.

$\boxed{58°}$

9. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2018, 9*) Назовём «зазубриванием» следующую операцию над многоугольником.

а) Каждую сторону многоугольника делим на три равные части.

б) Среднюю часть выбираем в качестве основания равностороннего треугольника, расположенного снаружи многоугольника.



в) Удаляем основание и добавляем две другие стороны.

Пусть M_0 — равносторонний треугольник, M_1 — многоугольник, полученный путём зазубривания M_0, M_2 получен зазубриванием M_1 (см. рисунок), …, M_{2018} получен зазубриванием M_{2017}.

Найдите $S(M_{2018})$, если известно, что $S(M_0) = 3$. В ответе укажите значение $S(M_{2018})$, округлённое до сотых.

$\boxed{4{,}8}$

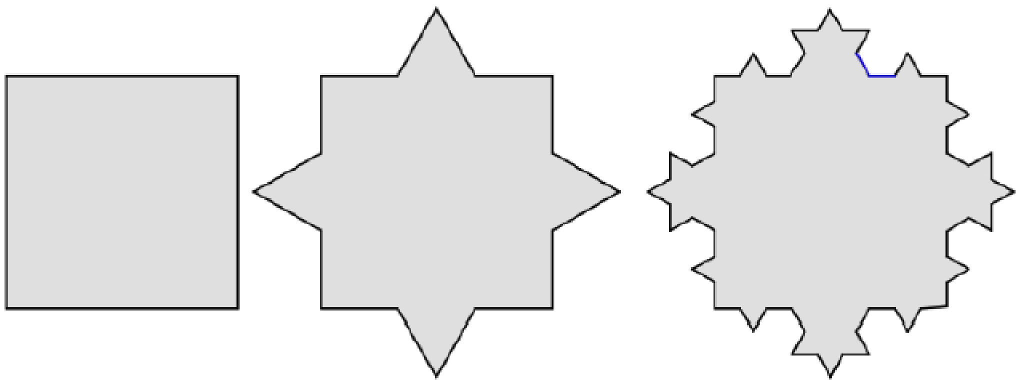
10. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2018, 9*) Назовём «зазубриванием» следующую операцию над многоугольником.

а) Каждую сторону многоугольника делим на три равные части.

б) Среднюю часть выбираем в качестве основания равностороннего треугольника, расположенного снаружи многоугольника.

в) Удаляем основание и добавляем две другие стороны.

Пусть K_0 — квадрат со стороной 2, K_1 — многоугольник, полученный путём зазубривания K_0, K_2 получен зазубриванием K_1 (см. рисунок), …, K_{2018} получен зазубриванием K_{2017}.



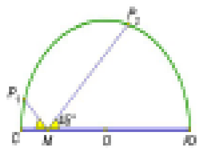
Найдите площадь $S(K_{2018})$. Ответ округлите до сотых по стандартным математическим правилам.

$\boxed{6{,}4}$

11. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017, 9*) В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC известен угол BCD, равный 120°. В этот угол вписана окружность радиуса 1, проходящая через точки A, B и D. Найдите площадь треугольника ABD.

$\boxed{\frac{\sqrt{3}}{4}}$

12. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017, 9*) Марк Уотни испытывает на прочность новый купол, предназначенный для экспедиции на Марс. Купол выполнен в форме полусферы радиуса 20 м. Марк поворачивается на север и стреляет под углом 45° к земле, потом поворачивается на юг и тоже стреляет под углом 45° (см. рис). Какие значения может принимать $|P_1P_2|$ — расстояние между точками попадания?



$\boxed{20\sqrt{2}}$

13. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017, 9*) На диаметре AB выбрана точка M. Точки C и D, лежащие на окружности по одну сторону от AB, выбраны так, что $\angle AMC = \angle BMD = 30°$. Найдите диаметр окружности, если известно, что $CD = 12$.

$\boxed{8\sqrt{3}}$

14. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 9*) Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами $BC = 30$ и $AC = 40$. На сторонах AB, BC и CA выбраны точки C_1, A_1, B_1 соответственно так, что $AC_1 = BA_1 = CB_1 = 1$. Найдите площадь треугольника $A_1B_1C_1$.

$\boxed{554{,}2}$

15. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 9*) В трапеции $KLMN$ известны основания $KN = 25$, $LM = 15$ и боковые стороны $KL = 6$, $MN = 8$. Найдите длину отрезка, соединяющего середины оснований.

$\boxed{5}$

16. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 9*) Окружность с диаметром AB пересекает отрезки AC и BC в точках M и N соответственно, причём длина отрезка MN равна радиусу окружности. Найдите площадь четырехугольника $ABNM$, если известно, что $AC = 12$ и $BC = 8$.

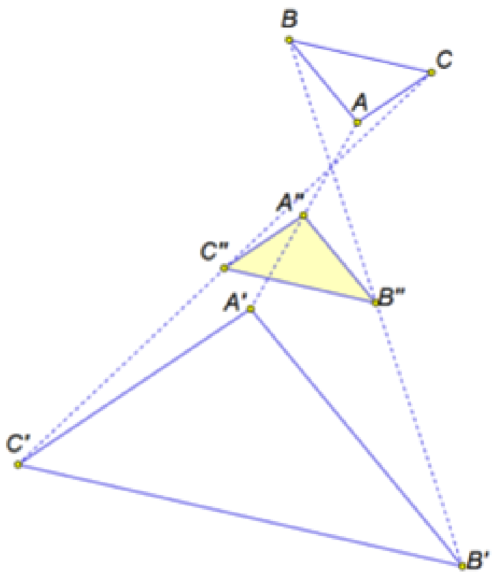
$\boxed{18\sqrt{3}}$

17. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015, 9*) В треугольник ABC вписана окружность с центром O, к которой проведена касательная, пересекающая стороны AC и AB в точках M и N соответственно. Найдите угол A треугольника ABC, если $\angle MON = 26°$.

$\boxed{128°}$

18. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015, 9*) Даны треугольники ABC и $A'B'C'$, площади которых равны 1 и 2025 соответственно. Известно, что лучи AB и $A'B'$ параллельны и идут в противоположных направлениях (см. рисунок). То же верно и для пар BC и $B'C'$, CA и $C'A'$. Точки A'', B'' и C'' — середины отрезков AA', BB' и CC'. Найдите площадь треугольника $A''B''C''$.

$\boxed{484}$



19. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2018, 10–11*) Найдите площадь треугольника ABC, в котором $AB = 4$, $AC = 5$ и $\cos(\angle B - \angle C) = \frac{11}{16}$.

$\boxed{\frac{5\sqrt{15}}{4}}$

20. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2018, 10–11*) В окружности радиуса $5\sqrt{2}$ проведены взаимно перпендикулярные хорды, которые точкой пересечения делятся в отношении $6 : 1$ и $2 : 3$. Найдите расстояние от центра окружности до точки пересечения хорд.

$\boxed{\sqrt{26}}$

21. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2018, 10–11*) В треугольник ABC, в котором сумма сторон AB и BC в $9/5$ раз больше стороны AB, вписана окружность, касающаяся сторон BC, AC и AB в точках M, N и K соответственно. Отношение площади треугольника MNC к площади треугольника ABC равно r. Найдите при данных условиях:

а) наименьшее значение r;

б) все возможные значения r.

$\boxed{\text{а) } \frac{16}{81}\text{; б) } \left[\frac{16}{81}; \frac{2}{7}\right)}$

22. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2018, 10–11*) Внутри треугольника ABC взята такая точка D, что $\angle ABD = \angle CBD = 40°$, $\angle ACD = 20°$, $\angle CAD = 30°$. Найдите:

а) углы BAD и BCD;

б) расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников ABC и BCD, если $BC = 3$.

$\boxed{\text{а) } \angle BAD = 30°,\ \angle BCD = 20°\text{; б) } \sqrt{3}}$

23. (*«Покори Воробъёвы горы!», 2018, 10–11*) Прямая, проходящая через точки, симметричные основанию высоты AD остроугольного треугольника ABC относительно сторон AC и AB, пересекает эти стороны в точках E и F соответственно. Найдите расстояние от точки B до точки пересечения отрезков BE и CF, если $AC = b$ и $\angle ABC = \beta$.

$\boxed{x = b \operatorname{ctg} \beta}$

24. (*«Покори Воробъёвы горы!», 2017, 10–11*) Медиана AM треугольника ABC перпендикулярна его биссектрисе BL. Найдите площадь треугольника ABM, если площадь треугольника ABL равна 10.

$\boxed{15}$

25. (*«Покори Воробъёвы горы!», 2017, 10–11*) Продолжение биссектрисы AD треугольника ABC пересекает окружность, описанную вокруг этого треугольника, в точке E. Найдите площадь треугольника ABC, если $BC = a$, $\angle BAC = \alpha$, $AE = d$.

$\boxed{\left(d^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \frac{a^2}{4}\right) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$

26. (*«Покори Воробъёвы горы!», 2017, 10–11*) В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведена высота CK. Периметр треугольника ABC равен 13, а периметр треугольника BCK равен 5. Найдите периметр треугольника ACK.

$\boxed{12}$

27. (*«Покори Воробъёвы горы!», 2017, 10–11*) В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC и $\angle ABC = \frac{\pi}{9}$ на стороне AB выбрана точка D так, что $BD = AC$. Найдите величину угла DCB (в радианах) и сравните её с 0,18.

$\boxed{\frac{\pi}{18} < 0{,}18}$

28. (*«Покори Воробъёвы горы!», 2016, 10–11*) Серединами оснований BC и AD трапеции $ABCD$ являются точки K и L соответственно. Известно, что $AD = 10 \cdot BC$. На боковых сторонах AB и CD взяты соответственно точки M и N так, что прямая MN параллельна основаниям трапеции. При каком значении отношения $AM : MB$ сумма площадей треугольников BKN и MNL будет наибольшей?

$\boxed{19 : 17}$

29. (*«Покори Воробъёвы горы!», 2016, 10–11*) В окружность с центром O вписан четырёхугольник $ABCD$, диагонали AC и BD которого пересекаются в точке M, причём $AM = 4$, $AB = 6$. Определите, какой может быть наименьшая длина диагонали BD, если известно, что стороны AB и AD равноудалены от точки O.

$\boxed{4\sqrt{5}}$

30. (*«Покори Воробъёвы горы!», 2016, 10–11*) На сторонах AB и BC треугольника ABC расположены точки M и N соответственно. При этом $AM : MB = 3 : 1$, $CN : NB = 1 : 7$. Какой процент от площади четырёхугольника $AMNC$ составляет площадь треугольника MBN?

$\boxed{28\%}$

31. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11*) Окружности с центрами в точках O_1 и O_2 пересекаются внешним образом в точках A и B (то есть точки O_1 и O_2 лежат по разные стороны от прямой AB). Известно, что $\angle AO_1B = \alpha$, $\angle AO_2B = \beta$ и $O_1O_2 = a$. Найдите радиусы окружностей.

$R_1 = \frac{a \sin \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\alpha+\beta}{2}}$, $R_2 = \frac{a \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha+\beta}{2}}$

32. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11*) Окружность касается одной из сторон угла с вершиной A в точке B и пересекает вторую сторону в точках C и D, причём AD в три раза меньше AC. Косинус угла A равен $\sqrt{3}/4$.

а) Найдите отношение $BC : BD$.

б) Найдите отношение радиуса окружности к BD.

а) $\sqrt{3}$; б) $\sqrt{\frac{10}{13}}$

33. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11*) В четырёхугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 2$, $BC = 4$, $CD = 5$ вписали окружность и вокруг него описали окружность. Найдите площадь четырёхугольника.

$2\sqrt{30}$

34. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11*) Города A, B, C, D, E лежат на одной окружности и попарно соединены прямолинейными дорогами. Два велосипедиста выехали одновременно из A в D и из C в E, повстречавшись в пути. Затем они выехали одновременно из D в B и из E в C, опять повстречавшись в пути. Наконец, они выехали одновременно из B в E и из C в B, прибыв в пункты назначения одновременно. Найдите BC, если $AE = 2$ км и $CD = 4$ км, а скорость каждого велосипедиста постоянна.

16 км

35. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11*) В треугольнике ABC стороны AB и BC равны соответственно 3 и 1. Биссектриса BD равна $\sqrt{2}$. Найдите угол BAC.

$\arccos \frac{3\sqrt{3}}{5}$

36. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11*) В треугольнике ABC биссектрисы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O. Известно, что $2 \cdot AO = 7 \cdot OA_1$, $BO = 2 \cdot OB_1$. Найдите отношение высоты, опущенной из точки A, к радиусу вписанной в треугольник ABC окружности.

$9/2$

37. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11*) Треугольник ABC вписан в окружность с центром в точке O. Биссектрисы внутренних углов треугольника при вершинах A и B пересекают описанную окружность в точках A_1 и B_1 соответственно. Угол между биссектрисами равен $60°$. Длина стороны AB равна 3. Найдите площадь треугольника A_1B_1O.

$\frac{3\sqrt{3}}{4}$

38. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11*) В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность с центром O, при этом $\angle AOB = 75°$, $AB = 3$. Найдите площадь круга, ограниченного описанной вокруг треугольника ABE окружностью, где E — точка пересечения прямых AD и BC.

9π

39. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11*) Косинус острого угла прямоугольного треугольника равен $2/\sqrt{5}$. Через середины одного катета и гипотенузы провели окружность, касающуюся другого катета. Найдите отношение части гипотенузы, лежащей внутри получившегося круга, ко всей гипотенузе.

$\boxed{2/5 \text{ или } 11/40}$

40. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11*) Окружность радиуса 1 проходит через вершины A и B треугольника ABC и пересекает стороны AC и BC в точках M и K соответственно. Найдите площадь треугольника ABC, если $AB = \sqrt{3}$, $MK = 1$, а центр окружности находится внутри треугольника ABC на расстоянии 5 от точки C.

$\boxed{6\sqrt{3}}$

41. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11*) В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой. На стороне AC как на диаметре построена окружность. Из вершины B проведена касательная к окружности, отличная от BC, и D — точка касания. Точка H является основанием перпендикуляра, проведённого из точки D на сторону AC. Найдите отношение $DH : EH$, где E — точка пересечения DH и AB.

$\boxed{2}$