

## Планиметрия на олимпиаде «Ломоносов»

1. («Ломоносов», 2016, 7–9) В прямоугольнике  $ABDF$  на сторонах  $BD = 2$  и  $DF = 3$  выбрали точки  $C$  и  $E$  соответственно, так, что треугольник  $AFE$  равен треугольнику  $EDC$ . Потом от прямоугольника  $ABDF$  отрезали треугольники  $ABC$ ,  $CDE$  и  $AFE$ . Найдите углы оставшегося треугольника.

90°, 45°, 45°

2. («Ломоносов», 2015, 8) В равностороннем треугольнике  $ABC$  на стороне  $BC$  выбраны точки  $A_1$  и  $A_2$  так, что  $BA_1 = A_1A_2 = A_2C$ . На стороне  $AC$  выбрана точка  $B_1$  так, что  $AB_1 : B_1C = 1 : 2$ . Найдите сумму углов  $AA_1B_1$  и  $AA_2B_1$ .

90°

3. («Ломоносов», 2012, 8) На сторонах  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$  равнобедренной трапеции  $ABCD$  с основаниями  $BC$  и  $AD$  отметили точки  $K$ ,  $L$ ,  $M$  и  $N$  соответственно. Оказалось, что  $KLMN$  — параллелограмм. Докажите, что  $KP = MQ$ , где  $P$  и  $Q$  — середины сторон  $AB$  и  $CD$  соответственно.

4. («Ломоносов», 2011, 8) Из вершины прямого угла  $C$  треугольника  $ABC$  проведена медиана  $CM$ . Окружность, вписанная в треугольник  $ACM$ , касается стороны  $CM$  в её середине. Найдите углы треугольника  $ABC$ .

30°, 60°, 90°

5. («Ломоносов», 2014, 8–9) Хорда  $AC$  образует угол  $32^\circ$  с диаметром  $AD$ . Из центра окружности  $O$  опущен перпендикуляр  $OH$  на хорду  $AC$ , его продолжение пересекает окружность в точке  $B$ . Найдите угол между прямыми  $BC$  и  $AD$ .

3°

6. («Ломоносов», 2015, 8–9) В треугольнике  $ABC$ , основание  $AB$  которого лежит на оси абсцисс, проведены высоты  $AM$ ,  $BN$  и  $CK$ . Найдите длину основания  $AB$ , если известны координаты точек  $M(2, 2)$  и  $N(4, 4)$ .

4√5

7. («Ломоносов», 2013, 8–9) Дан параллелограмм  $ABCD$  и выбраны точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  и  $D_1$  такие, что точка  $A$  является серединой отрезка  $DD_1$ , точка  $B$  — серединой  $AA_1$ , точка  $C$  — серединой  $BB_1$  и точка  $D$  — серединой  $CC_1$ . Найдите площадь четырёхугольника  $A_1B_1C_1D_1$ , если известно, что  $S(ABCD) = 1$ .

5

8. («Ломоносов», 2017, 9) Из отрезков длин 3, 5, 7 и 9 составлен четырёхугольник, в который вписана окружность. К ней проведены две касательные: одна пересекает одну пару соседних сторон четырёхугольника, а другая — пару оставшихся. Найдите разность периметров треугольников, отсечённых от четырёхугольника этими касательными.

8 или 7

9. («Ломоносов», 2012, 9) Четырёхугольник  $ABCD$  вписан в окружность. Найдите величину угла  $ACB$ , если известно, что  $\angle ACD = 72^\circ$  и  $AB = BD$ .

13

10. («Ломоносов», 2015, 9) В выпуклом четырёхугольнике  $ABCD$  площади треугольников  $ABD$  и  $B CD$  равны, а площадь  $ACD$  равна половине площади  $ABD$ . Найдите длину отрезка  $CM$ , где  $M$  — середина стороны  $AB$ , если известно, что  $AD = 12$ .

181

11. («Ломоносов», 2013, 9) Две окружности радиусов  $R$  и  $R'$  касаются друг друга внешним образом в точке  $P$  и касаются прямой  $l$  в точках  $A$  и  $B$  соответственно. Пусть  $Q$  — точка пересечения прямой  $BP$  с первой окружностью. Определить, на каком расстоянии от прямой  $l$  расположена точка  $Q$ .

22

12. («Ломоносов», 2011, 9) В равнобедренном треугольнике  $ABC$  провели биссектрису  $BP$ . Докажите, что если угол  $BAC$  равен  $100^\circ$ , то  $AP + PB = BC$ .

13. («Ломоносов», 2017, 10–11) Четырёхугольник  $ABCD$  вписан в окружность. Касательные к этой окружности, проведённые в точках  $A$  и  $C$ , пересекаются на прямой  $BD$ . Найдите сторону  $AD$ , если  $AB = 2$  и  $BC : CD = 4 : 5$ .

25

14. («Ломоносов», 2016, 10–11) В треугольнике  $ABC$  точки  $A_1, B_1, C_1$  — середины сторон  $BC, AC$  и  $AB$  соответственно. Найдите длину стороны  $AC$ , если известно, что сумма векторов  $3 \cdot \overrightarrow{AA_1} + 4 \cdot \overrightarrow{BB_1} + 5 \cdot \overrightarrow{CC_1}$  равна вектору с координатами  $(2, 1)$ .

25

15. («Ломоносов», 2015, 10–11) В выпуклом четырёхугольнике  $ABCD$  диагонали  $AC$  и  $DB$  перпендикулярны сторонам  $DC$  и  $AB$  соответственно. Из точки  $B$  проведён перпендикуляр на сторону  $AD$ , пересекающий  $AC$  в точке  $O$ . Найдите  $AO$ , если  $AB = 4, OC = 6$ .

2

16. («Ломоносов», 2014, 10–11) Прямоугольник, отношение сторон которого равно 5, имеет наибольшую площадь среди всех прямоугольников, вершины которых лежат на сторонах данного ромба, а стороны параллельны диагоналям ромба. Найдите острый угол ромба.

2 arctg 5/1 = arctg 5/12

17. («Ломоносов», 2013, 10–11) В трапеции  $ABCD$ , где  $BC \parallel AD$ , а диагонали пересекаются в точке  $O$ , на отрезке  $BC$  выбрана точка  $K$  так, что  $BK : CK = 2 : 1$ , а на отрезке  $AD$  выбрана точка  $M$  так, что  $AM : MD = 1 : 2$ . Найти площадь треугольника  $COD$ , если  $AD = 5, BC = 2, KM = 7/3$ , а  $\cos \angle CAD = 1/3$ .

20/2

18. («Ломоносов», 2012, 10–11) Точка  $O$  — центр вписанной в треугольник  $ABC$  окружности. Продолжение отрезка  $BO$  за точку  $O$  пересекает описанную вокруг треугольника  $ABC$  окружность в точке  $D$ . Найдите угол  $B$ , если  $OD = 4AC$ .

2 arccos 8/13 - arccos 8/13

19. («Ломоносов», 2011, 10–11) Две окружности касаются друг друга внутренним образом в точке  $K$ . Хорда  $AB$  большей окружности касается меньшей окружности в точке  $L$ , делящей хорду в отношении  $AL : BL = 2 : 3$ . Найдите  $AK$ , если  $BK = 12$ .

8

20. («Ломоносов», 2010) На основании  $AC$  равнобедренного треугольника  $ABC$  взята точка  $E$ , а на боковых сторонах  $AB$  и  $BC$  точки  $D$  и  $F$  так, что  $DE \parallel BC$  и  $EF \parallel AB$ . Какую часть площади треугольника  $ABC$  занимает площадь треугольника  $DEF$ , если  $BF : EF = 2 : 3$ ?

$\frac{25}{9}$

21. («Ломоносов», 2010) Диагонали трапеции  $ABCD$  с основаниями  $AD = 3$  и  $BC = 1$  пересекаются в точке  $O$ . Две окружности, пересекающие основание  $BC$  в точках  $K$  и  $L$  соответственно, касаются друг друга в точке  $O$ , а прямой  $AD$  — в точках  $A$  и  $D$  соответственно. Найдите  $AK^2 + DL^2$ .

12

22. («Ломоносов», 2009) Две окружности касаются внешним образом: друг друга в точке  $A$ , а третьей окружности — в точках  $B$  и  $C$ . Продолжение хорды  $AB$  первой окружности пересекает вторую окружность в точке  $D$ , продолжение хорды  $AC$  пересекает первую окружность в точке  $E$ , а продолжения хорд  $BE$  и  $CD$  — третью окружность в точках  $F$  и  $G$  соответственно. Найдите  $BG$ , если  $BC = 5$  и  $BF = 12$ .

13

23. («Ломоносов», 2008) Найдите радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника с основанием 6, если синус одного его угла равен косинусу другого.

$3\sqrt{2}$  или  $3$

24. («Ломоносов», 2007) На стороне  $AB$  треугольника  $ABC$  взята такая точка  $D$ , что окружность, проходящая через точки  $A$ ,  $C$  и  $D$ , касается прямой  $BC$ . Найдите  $AD$ , если  $AC = 9$ ,  $BC = 12$  и  $CD = 6$ .

10

25. («Ломоносов», 2006) Точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  лежат на одной прямой. Отрезок  $AB$  является диаметром первой окружности, а отрезок  $BC$  — диаметром второй окружности. Прямая, проходящая через точку  $A$ , пересекает первую окружность в точке  $D$  и касается второй окружности в точке  $E$ , при этом  $BD = 9$  и  $BE = 12$ . Найдите радиусы окружностей.

93 или 8

26. («Ломоносов», 2005) Найдите площадь трапеции  $ABCD$  с боковой стороной  $BC = 5$ , если расстояния от вершин  $A$  и  $D$  до прямой  $BC$  равны 3 и 7 соответственно.

27

27. («Ломоносов», 2005) На окружности взята точка  $A$ , на её диаметре  $BC$  — точки  $D$  и  $E$ , а на его продолжении за точку  $B$  — точка  $F$ . Найдите  $BC$ , если  $\angle BAD = \angle ACD$ ,  $\angle BAF = \angle CAE$ ,  $BD = 2$ ,  $BE = 5$  и  $BF = 4$ .

11