Планиметрия на олимпиаде «Физтех»

1. (*«Физтех», 2017, 9*) В треугольник ABC вписаны два равных прямоугольника $PQRS$ и $P_1Q_1R_1S_1$ (при этом точки P и P_1 лежат на стороне AB, точки Q и Q_1 лежат на стороне BC, а точки R, S, R_1 и S_1 — на стороне AC). Известно, что $PS = 12$, $P_1S_1 = 3$. Найдите площадь треугольника ABC.

$\boxed{\frac{225}{2}}$

2. (*«Физтех», 2017, 9–10*) Продолжение высоты BH треугольника ABC пересекает описанную около него окружность в точке D (точки B и D лежат по разные стороны от прямой AC). Градусные меры дуг AD и CD, не содержащих точки B, равны 60° и 90° соответственно. Определите, в каком отношении отрезок BD делится стороной AC.

$\boxed{\sqrt{3} : 1}$

3. (*«Физтех», 2017, 9–10*) В треугольнике ABC проведена медиана BM; MD и ME — биссектрисы треугольников AMB и CMB соответственно. Отрезки BM и DE пересекаются в точке P, причём $BP = 2$, $MP = 4$.

а) Найдите отрезок DE.

б) Пусть дополнительно известно, что около четырёхугольника $ADEC$ можно описать окружность. Найдите её радиус.

$\boxed{\text{а) } 8;\ \text{б) } 2\sqrt{85}}$

4. (*«Физтех», 2017, 9–10*) В треугольнике ABC известно, что $AB = 3$, $AC = 4$, $\angle BAC = 60^\circ$. Продолжение биссектрисы AA_1 пересекает окружность, описанную около треугольника ABC, в точке A_2. Найдите площади треугольников OA_2C и A_1A_2C (O — центр окружности, описанной около треугольника ABC).

$\boxed{\frac{13\sqrt{3}}{12} \text{ и } \frac{13\sqrt{3}}{21}}$

5. (*«Физтех», 2017, 10–11*) Лучи AB и DC пересекаются в точке P, а лучи BC и AD пересекаются в точке Q. Известно, что треугольники ADP и QAB подобны (*вершины не обязательно указаны в соответствующем порядке*), а четырёхугольник $ABCD$ можно вписать в окружность радиуса 7.

а) Найдите AC.

б) Пусть дополнительно известно, что окружности, вписанные в треугольники ABC и ACD, касаются отрезка AC в точках K и T соответственно, причём $CK : KT : TA = 6 : 1 : 7$ (точка T лежит между K и A). Найдите $\angle DAC$ и площадь четырёхугольника $ABCD$.

$\boxed{\text{а) } 14;\ \text{б) } 45^\circ \text{ и } 97}$

6. (*«Физтех», 2017, 11*) В треугольнике ABC угол при вершине A в два раза больше угла при вершине C. Через вершину B проведена касательная ℓ к окружности Ω, описанной около треугольника ABC. Расстояния от точек A и C до этой касательной равны соответственно 4 и 9.

а) Найдите расстояние от точки A до прямой BC.

б) Найдите радиус окружности Ω и длину стороны AB.

$\boxed{\text{а) } 5;\ \text{б) } \frac{32}{7} \text{ и } \frac{16}{\sqrt{7}}}$

7. (*«Физтех», 2016, 9*) Точка A лежит на стороне LM треугольника KLM с углом 120° при вершине K. В треугольники AKL и AKM вписаны окружности с центрами F и O соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника FKO, если $AO = 2$, $AF = 7$.

$\boxed{\sqrt{\frac{53}{3}}}$

8. (*«Физтех», 2016, 9*) Окружность проходит через вершины K и P треугольника KPM и пересекает его стороны KM и PM в точках F и B соответственно, причём $KF : FM = 3 : 1$, $PB : BM = 6 : 5$. Найдите KP, если $BF = \sqrt{15}$.

$\boxed{2\sqrt{33}}$

9. (*«Физтех», 2016, 9*) Окружность проходит через вершины Q и E треугольника MQE и пересекает его стороны MQ и ME соответственно в точках B и D, отличных от вершин треугольника. Отношение площади треугольника BDM к площади треугольника MQE равно $9/121$.

а) Найдите отношение $QE : BD$.

б) Пусть дополнительно известно, что отношение площадей треугольников BME и DQM равно 4. Найдите отношение $BQ : DE$.

$\boxed{\text{а) } 11 : 3; \text{ б) } 5 : 19}$

10. (*«Физтех», 2016, 10*) Вокруг равнобедренного остроугольного треугольника NPQ с основанием NQ описана окружность Ω. Точка F — середина дуги PN, не содержащей точки Q. Известно, что расстояния от точки F до прямых PN и QN равны соответственно 5 и $20/3$. Найдите радиус окружности Ω и площадь треугольника NPQ.

$\boxed{6;\ \frac{35\sqrt{35}}{9}}$

11. (*«Физтех», 2016, 10*) Вокруг равнобедренного остроугольного треугольника NPQ с основанием NQ описана окружность Ω. Расстояние от середины дуги PN, не содержащей точки Q, до стороны PN равно 4, а расстояние от середины дуги QN, не содержащей точки P, до стороны QN равно 0,4. Найдите радиус окружности Ω и площадь треугольника NPQ.

$\boxed{5;\ \frac{192\sqrt{6}}{25}}$

12. (*«Физтех», 2016, 10*) Равнобедренный треугольник PQT с основанием PQ вписан в окружность Ω. Хорды AB и CD, параллельные прямой PQ, пересекают сторону QT в точках L и M соответственно, и при этом $QL = LM = MT$. Найдите радиус окружности Ω и площадь треугольника PQT, если $AB = 2\sqrt{14}$, $CD = 2\sqrt{11}$, а центр O окружности Ω расположен между прямыми AB и CD.

$\boxed{\frac{15}{4};\ 18}$

13. (*«Физтех», 2016, 11*) Точки A, B, C, D, E последовательно расположены на прямой, причём $AB = BC = DE = 2$, $CD = 1$. Окружности Ω и ω, касающиеся друг друга, таковы, что Ω проходит через точки D и E, а ω проходит через точки B и C. Найдите радиусы окружностей Ω и ω, если известно, что их центры и точка A лежат на одной прямой.

$\boxed{R = \frac{8}{\sqrt{19}},\ r = \frac{11}{2\sqrt{19}}}$

14. (*«Физтех», 2016, 11*) Окружность ω радиуса 4 с центром O вписана в остроугольный треугольник EFQ и касается его сторон FQ и EQ в точках M и P соответственно. Окружность Ω радиуса $\sqrt{65}/2$ с центром T описана около треугольника PQM.

а) Найдите OQ.

б) Пусть дополнительно известно, что отношение площади треугольника FTE к площади треугольника EFQ равно $2/3$. Найдите длину биссектрисы QA треугольника EFQ, а также его площадь.

а) $\sqrt{65}$; б) $QA = \frac{3\sqrt{65}}{2}$, $S = 84$

15. (*«Физтех», 2016, 11*) В треугольнике ABC медианы BD и CE пересекаются в точке M. Окружность, построенная на отрезке BM как на диаметре, проходит через вершину C и касается прямой DE. Известно, что $CM = 4$. Найдите высоту AH треугольника ABC, угол CBD и площадь треугольника ABC.

12; 30°; $24\sqrt{3}$

16. (*«Физтех», 2015, 10–11*) На стороне BC треугольника ABC взята точка M такая, что $BM : MC = 2 : 5$. Биссектриса BL данного треугольника и отрезок AM пересекаются в точке P под углом 90°.

а) Найдите отношение площади треугольника ABP к площади четырёхугольника $LPMC$.

б) На отрезке MC отмечена точка F такая, что $MF : FC = 1 : 4$. Пусть дополнительно известно, что прямые LF и BC перпендикулярны. Найдите угол CBL.

а) $9 : 40$; б) $\arccos \frac{3\sqrt{21}}{14}$

17. (*«Физтех», 2015, 10–11*) Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Две окружности Ω_1 и Ω_2 равных радиусов с центрами O_1 и O_2 вписаны в углы BAD и BCD соответственно, при этом первая касается стороны AD в точке K, а вторая касается стороны BC в точке T.

а) Найдите радиус окружности Ω_1, если $AK = 2$, $CT = 8$.

б) Пусть дополнительно известно, что точка O_2 является центром окружности, описанной около треугольника BOC. Найдите угол BDC.

а) 4; б) $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ или $\pi - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

18. (*«Физтех», 2015, 10–11*) В углы A и B треугольника ABC вписаны соответственно окружности с центрами O_1 и O_2 равного радиуса, точка O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Данные окружности касаются стороны AB в точках K_1, K_2 и K соответственно, при этом $AK_1 = 4$, $BK_2 = 6$ и $AB = 16$.

а) Найдите длину отрезка AK.

б) Пусть окружность с центром O_1 касается стороны AC в точке K_3. Найдите угол CAB, если известно, что точка O_1 является центром окружности, описанной около треугольника OK_1K_3.

а) $\frac{32}{5}$; б) $2\arcsin\frac{3}{5} = \arccos\frac{7}{25}$

19. (*«Физтех», 2014*) Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD. Окружность ω радиуса 2, центр O которой лежит на диагонали BD, касается отрезков BC, CD и AD в точках M, N и K соответственно. Известно, что $BM = 3$, а четырёхугольник $KOBA$ вписан в окружность Ω. Найдите угол COD, площадь трапеции $ABCD$ и радиус окружности Ω.

90°, 26, $\frac{5\sqrt{13}}{6}$

20. (*«Физтех», 2014*) Четырёхугольник $ABKD$ вписан в окружность Ω радиуса $\sqrt{17}$. На стороне KD выбрана точка C так, что $\angle BCD = 90^\circ$. Окружность ω радиуса 4, описанная вокруг треугольника BCK, касается отрезка AD и прямой AB. Найдите длину отрезка AB, угол BAD и площадь четырёхугольника $ABCD$.

$\boxed{2,\ 2\operatorname{arctg} 2 = \pi - \arccos\frac{3}{5},\ \frac{232}{25}}$

21. (*«Физтех», 2013*) В параллелограмме $ABCD$ угол ADC равен $\arcsin\frac{\sqrt{24}}{5}$. Окружность Ω, проходящая через точки A, C и D, пересекает стороны AB и BC в точках N и L соответственно, причём $AN = 11$, $BL = 6$. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$ и радиус окружности Ω.

$\boxed{S = 60\sqrt{6},\ R = \frac{5\sqrt{265}}{4\sqrt{6}}}$

22. (*«Физтех», 2013*) Дана прямоугольная трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD, причём $BC < AD$, $\angle BCD = 90^\circ$. Точка M — середина отрезка CD. Известно, что окружность радиуса 5 проходит через точки A и B и касается стороны CD в точке M, а $\cos\angle BMC = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Найдите длины отрезков AB и BC, а также площадь трапеции.

$\boxed{AB = 10,\ BC = \frac{10}{9},\ S = \frac{200\sqrt{2}}{9}}$

23. (*«Физтех», 2012*) Две окружности разных радиусов касаются внешним образом. К ним проведены две общие внешние касательные AC и BD. Их точки касания с меньшей окружностью — A и B, с большей окружностью — C и D. Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AB = 24/5$, $AC = 12$.

$\boxed{3 \text{ и } 12}$

24. (*«Физтех», 2012*) В трапеции $ABCD$ основание BC равно 5, боковая сторона AB равна 10. Биссектиса угла BAD пересекает сторону CD в точке E, а прямую BC — в точке F, причём $AE \perp CD$, $EF = 4$. Найдите длины отрезков AE и AD, а также площадь трапеции.

$\boxed{AE = 12,\ AD = 15,\ S = 96}$

25. (*«Физтех», 2011*) В параллелограмме $ABCD$ окружность радиуса $1/4$ с центром на отрезке CD проходит через точку D и касается отрезка BC в точке E такой, что угол BED равен $\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$. Найдите высоту параллелограмма DF, проведённую к стороне BC, и длину отрезка CD. Найдите площадь параллелограмма, если $AB = BE$.

$\boxed{DF = 8/25,\ CD = 24/21,\ S = 16/25}$

26. (*«Физтех», 2011*) В треугольнике ABC окружность радиуса $\frac{13}{3}$ с центром на отрезке BC проходит через точку B и касается отрезка AC в точке D такой, что угол ADB равен $\operatorname{arctg}\frac{3}{2}$. Найдите высоту BF треугольника ABC и длину отрезка CD. Найдите площадь треугольника ABC, если длины отрезков AB и CD равны.

$\boxed{BF = 6,\ CD = \frac{52}{5},\ S = \frac{6}{5}\left(36 + \sqrt{451}\right)}$

27. (*«Физтех», 2010*) В равнобедренном треугольнике ABC основание AC равно 1, угол ABC равен $2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$. Точка D лежит на стороне BC так, что площадь треугольника ABC вчетверо больше площади треугольника ADC. Найдите расстояние от точки D до прямой AB и радиус окружности, описанной около треугольника ADC.

$\boxed{\frac{3}{2\sqrt{5}},\ \frac{\sqrt{265}}{32}}$

28. (*«Физтех», 2010*) В трапецию $ABCD$ можно вписать окружность. Длины её боковых сторон AB и CD равны соответственно 3 и 5, а длина основания AD больше длины BC. Средняя линия трапеции делит её на две части, отношение площадей которых равно $5/11$. Найдите радиус вписанной в трапецию окружности и длины её диагоналей.

$R = \frac{\sqrt{14}}{3}$, $AC = 2\sqrt{\frac{10}{3}}$, $BD = 2\sqrt{\frac{26}{3}}$

29. (*«Физтех», 2009*) Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке O, а их длины равны соответственно 30, 24 и 18. Найдите площади треугольников ABC и OA_1C, а также радиус окружности, описанной около треугольника OA_1C.

288, 48, $\frac{25}{4}$

30. (*«Физтех», 2009*) В треугольнике ABC точка D лежит на стороне AC, а точка E лежит на отрезке AD. Известно, что углы ABE, DBE и CBD равны, а длина отрезка DE вдвое меньше длины отрезка CD и втрое меньше длины отрезка AE. Найдите углы ABE и ACB.

$\angle ABE = 45^\circ$, $\angle ACB = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$

31. (*«Физтех», 2008*) В треугольнике ABC медиана BM равна 2, угол ABM равен $\operatorname{arctg} \frac{2}{3}$, угол CBM равен $\operatorname{arctg} \frac{1}{5}$. Найти стороны AB, BC и биссектрису BE треугольника ABC.

$AB = \frac{4}{\sqrt{13}}$, $BC = \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{13}}$, $BE = \frac{8\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{\sqrt{13}(1+2\sqrt{2})}$

32. (*«Физтех», 2007*) Окружность ω с центром O на стороне AC треугольника ABC касается сторон AB и BC в точках D и E соответственно. Известно, что $AD = 2CE$, а угол DOE равен $\operatorname{arcctg} \frac{1}{3}$. Найти углы треугольника ABC и отношение его площади к площади круга, ограниченного окружностью ω.

$\angle ABC = \pi - \operatorname{arcctg} \frac{1}{3}$, $\angle ACB = \frac{\pi}{4}$, $\angle BAC = \operatorname{arcctg} 2$; $\frac{2\sqrt{10}+7}{6\pi}$