

Планиметрия на олимпиаде «Физтех»

1. («Физтех», 2016, 9) Точка A лежит на стороне LM треугольника KLM с углом 120° при вершине K . В треугольники AKL и AKM вписаны окружности с центрами F и O соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника FKO , если $AO = 2$, $AF = 7$.

$$\frac{3}{\sqrt{55}} \wedge$$

2. («Физтех», 2016, 9) Окружность проходит через вершины K и P треугольника KPM и пересекает его стороны KM и PM в точках F и B соответственно, причём $KF : FM = 3 : 1$, $PB : BM = 6 : 5$. Найдите KP , если $BF = \sqrt{15}$.

$$2\sqrt{33}$$

3. («Физтех», 2016, 9) Окружность проходит через вершины Q и E треугольника MQE и пересекает его стороны MQ и ME соответственно в точках B и D , отличных от вершин треугольника. Отношение площади треугольника BDM к площади треугольника MQE равно $9/121$.

а) Найдите отношение $QE : BD$.

б) Пусть дополнительно известно, что отношение площадей треугольников BME и DQM равно 4. Найдите отношение $BQ : DE$.

$$61 : 9 (9 : 3 : 11) \wedge$$

4. («Физтех», 2017, 9) В треугольник ABC вписаны два равных прямоугольника $PQRS$ и $P_1Q_1R_1S_1$ (при этом точки P и P_1 лежат на стороне AB , точки Q и Q_1 лежат на стороне BC , а точки R , S , R_1 и S_1 — на стороне AC). Известно, что $PS = 12$, $P_1S_1 = 3$. Найдите площадь треугольника ABC .

$$\frac{7}{222}$$

5. («Физтех», 2017, 9–10) Продолжение высоты BH треугольника ABC пересекает описанную около него окружность в точке D (точки B и D лежат по разные стороны от прямой AC). Градусные меры дуг AD и CD , не содержащих точки B , равны 60° и 90° соответственно. Определите, в каком отношении отрезок BD делится стороной AC .

$$1 : \sqrt{3} \wedge$$

6. («Физтех», 2017, 9–10) В треугольнике ABC проведена медиана BM ; MD и ME — биссектрисы треугольников AMB и CMB соответственно. Отрезки BM и DE пересекаются в точке P , причём $BP = 2$, $MP = 4$.

а) Найдите отрезок DE .

б) Пусть дополнительно известно, что около четырёхугольника $ADEC$ можно описать окружность. Найдите её радиус.

$$8 : 2\sqrt{85} \wedge$$

7. («Физтех», 2017, 9–10) В треугольнике ABC известно, что $AB = 3$, $AC = 4$, $\angle BAC = 60^\circ$. Продолжение биссектрисы AA_1 пересекает окружность, описанную около треугольника ABC , в точке A_2 . Найдите площади треугольников OA_2C и A_1A_2C (O — центр окружности, описанной около треугольника ABC).

$$\frac{12}{13\sqrt{3}} \text{ и } \frac{12}{13\sqrt{3}}$$

8. («Физтех», 2018, 9) На продолжении стороны AC треугольника ABC за точку A отмечена точка T такая, что $\angle BAC = 2\angle BTC$. Найдите площадь треугольника ABC , если известно, что $AB = AC$, $BT = 70$, $AT = 37$.

420

9. («Физтех», 2018, 9) Окружность с центром O , вписанная в треугольник PQR , касается его сторон PQ , QR и RP в точках C , A и B соответственно. Прямые BO и CO пересекают стороны PQ и PR в точках K и L соответственно. Найдите отношение $QA : AR$, если $KQ = 3$, $QR = 16$, $LR = 1$.

7 : 6

10. («Физтех», 2018, 9) Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Пусть P — центр окружности, вписанной в треугольник ABD , а Q — центр окружности, вписанной в треугольник CBD . Луч BP пересекает сторону DA в точке M , а луч DQ пересекает сторону BC в точке N . Оказалось, что $AM = \frac{9}{7}$, $DM = \frac{12}{7}$ и $BN = \frac{20}{9}$, $CN = \frac{25}{9}$.

а) Найдите отношение $AB : CD$.

б) Пусть дополнительно известно, что данные в условии окружности касаются. Найдите длины сторон AB и CD .

а) 3 : 5; б) $AB = 3$, $CD = 5$

11. («Физтех», 2018, 9) В окружность вписан четырёхугольник $KLMN$ с диагоналями KM и LN , которые пересекаются в точке T . Основания перпендикуляров, опущенных из точки T на стороны четырёхугольника, лежат на этих сторонах. Расстояния от точки T до сторон KL , LM , MN , NK равны $4\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $\frac{8}{\sqrt{17}}$ и $\frac{8}{\sqrt{17}}$ соответственно.

а) Найдите отношение $KT : TM$.

б) Найдите длину диагонали LN , если дополнительно известно, что $KM = 10$.

а) 4 : 1; б) $\frac{13\sqrt{5}}{50}$

12. («Физтех», 2018, 10) В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ проведена диагональ BD , и в каждый из полученных треугольников ABD и BCD вписана окружность. Прямая, проходящая через вершину B и центр одной из окружностей, пересекает сторону DA в точке M . При этом $AM = \frac{8}{5}$ и $MD = \frac{12}{5}$. Аналогично, прямая, проходящая через вершину D и центр второй окружности, пересекает сторону BC в точке N . При этом $BN = \frac{30}{11}$ и $NC = \frac{25}{11}$.

а) Найдите отношение $AB : CD$.

б) Найдите длины сторон AB и CD , если дополнительно известно, что данные окружности касаются друг друга.

а) 4 : 5; б) $AB = 4$, $CD = 5$

13. («Физтех», 2018, 10) В треугольнике ABC сторона AC равна 6, а угол ACB равен 120° . Окружность Ω радиуса $\sqrt{3}$ касается сторон BC и AC треугольника ABC в точках K и L соответственно и пересекает сторону AB в точках M и N (M лежит между A и N) так, что отрезок MK параллелен AC . Найдите длины отрезков CL , MK , AB и площадь треугольника ANL .

$CL = 1$, $MK = 3$, $AB = 3\sqrt{13}$, $S_{ANL} = \frac{125\sqrt{3}}{52}$

14. («Физтех», 2018, 10) Диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, пересекаются в точке P . Известно, что расстояния от точки P до сторон AB , BC , CD , DA равны 4 , $\sqrt{3}$, $\frac{8}{\sqrt{19}}$ и $8\sqrt{\frac{3}{19}}$ соответственно (основания перпендикуляров, опущенных из точки P на стороны, лежат на этих сторонах).

- Найдите отношение $AP : PC$.
- Найдите длину диагонали BD , если дополнительно известно, что $AC = 10$.

$$\frac{61\sqrt{35}}{35} \quad (a) \quad 4 : 1; (b) \quad \frac{13}{35}$$

15. («Физтех», 2018, 10) Дан параллелограмм $ABCD$. Окружность Ω с диаметром 13 описана вокруг треугольника ABM , где M — точка пересечения диагоналей данного параллелограмма. Ω вторично пересекает луч CB и отрезок AD в точках E и K соответственно. Длина дуги AE в два раза больше длины дуги BM (дуги AE и BM не имеют общих точек). Длина отрезка EM равна 12 . Найдите длины отрезков BC , BK и периметр треугольника AKM .

$$BC = 13, BK = \frac{13}{20}, P_{AKM} = \frac{340}{13}$$

16. («Физтех», 2018, 11) Окружность Ω радиуса $\sqrt{3}$ касается сторон BC и AC треугольника ABC в точках K и L соответственно и пересекает сторону AB в точках M и N (M лежит между A и N) так, что отрезок MK параллелен AC , $KC = 1$, $AL = 6$. Найдите $\angle ACB$, длины отрезков MK , AB и площадь треугольника CMN .

$$\angle ACB = 120^\circ, MK = 3, AB = 5, S_{CMN} = \frac{5\sqrt{3}}{8}$$

17. («Физтех», 2018, 11) Дан параллелограмм $ABCD$. Окружность Ω с диаметром 5 описана вокруг треугольника ABM , где M — точка пересечения диагоналей данного параллелограмма. Ω вторично пересекает луч CB и отрезок AD в точках E и K соответственно. Длина дуги AE в два раза больше длины дуги BM (дуги AE и BM не имеют общих точек). Длина отрезка MK равна 3 . Найдите длины отрезков BC , BK и периметр треугольника EBM .

$$BC = 5, BK = \frac{5}{4}, P_{EBM} = \frac{5}{42}$$

18. («Физтех», 2017, 10–11) Лучи AB и DC пересекаются в точке P , а лучи BC и AD пересекаются в точке Q . Известно, что треугольники ADP и QAB подобны (вершины не обязательно указаны в соответствующем порядке), а четырёхугольник $ABCD$ можно вписать в окружность радиуса 7 .

- Найдите AC .
- Пусть дополнительно известно, что окружности, вписанные в треугольники ABC и ACD , касаются отрезка AC в точках K и T соответственно, причём $CK : KT : TA = 6 : 1 : 7$ (точка T лежит между K и A). Найдите $\angle DAC$ и площадь четырёхугольника $ABCD$.

$$(a) \quad 14; (b) \quad 45^\circ \text{ и } 97$$

19. («Физтех», 2017, 11) В треугольнике ABC угол при вершине A в два раза больше угла при вершине C . Через вершину B проведена касательная ℓ к окружности Ω , описанной около треугольника ABC . Расстояния от точек A и C до этой касательной равны соответственно 4 и 9 .

- Найдите расстояние от точки A до прямой BC .
- Найдите радиус окружности Ω и длину стороны AB .

$$(a) \quad \frac{7}{16} \text{ и } \frac{7}{32} \quad (b) \quad \frac{7}{16}$$

20. («Физтех», 2016, 10) Вокруг равнобедренного остроугольного треугольника NPQ с основанием NQ описана окружность Ω . Точка F — середина дуги PN , не содержащей точки Q . Известно, что расстояния от точки F до прямых PN и QN равны соответственно 5 и $20/3$. Найдите радиус окружности Ω и площадь треугольника NPQ .

$$\frac{6}{\sqrt{35}}; 9$$

21. («Физтех», 2016, 10) Вокруг равнобедренного остроугольного треугольника NPQ с основанием NQ описана окружность Ω . Расстояние от середины дуги PN , не содержащей точки Q , до стороны PN равно 4, а расстояние от середины дуги QN , не содержащей точки P , до стороны QN равно 0,4. Найдите радиус окружности Ω и площадь треугольника NPQ .

$$\frac{25}{9}; 5$$

22. («Физтех», 2016, 10) Равнобедренный треугольник PQT с основанием PQ вписан в окружность Ω . Хорды AB и CD , параллельные прямой PQ , пересекают сторону QT в точках L и M соответственно, и при этом $QL = LM = MT$. Найдите радиус окружности Ω и площадь треугольника PQT , если $AB = 2\sqrt{14}$, $CD = 2\sqrt{11}$, а центр O окружности Ω расположен между прямыми AB и CD .

$$81; \frac{7}{\sqrt{11}}$$

23. («Физтех», 2016, 11) Точки A, B, C, D, E последовательно расположены на прямой, причём $AB = BC = DE = 2$, $CD = 1$. Окружности Ω и ω , касающиеся друг друга, таковы, что Ω проходит через точки D и E , а ω проходит через точки B и C . Найдите радиусы окружностей Ω и ω , если известно, что их центры и точка A лежат на одной прямой.

$$\frac{61}{8}; \frac{61}{11}$$

24. («Физтех», 2016, 11) Окружность ω радиуса 4 с центром O вписана в остроугольный треугольник EFQ и касается его сторон FQ и EQ в точках M и P соответственно. Окружность Ω радиуса $\sqrt{65}/2$ с центром T описана около треугольника PQM .

а) Найдите OQ .

б) Пусть дополнительно известно, что отношение площади треугольника FTE к площади треугольника EFQ равно $2/3$. Найдите длину биссектрисы QA треугольника EFQ , а также его площадь.

$$84; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}$$

25. («Физтех», 2016, 11) В треугольнике ABC медианы BD и CE пересекаются в точке M . Окружность, построенная на отрезке BM как на диаметре, проходит через вершину C и касается прямой DE . Известно, что $CM = 4$. Найдите высоту AH треугольника ABC , угол CBD и площадь треугольника ABC .

$$12; 30^\circ; 24\sqrt{3}$$

26. («Физтех», 2015, 10–11) На стороне BC треугольника ABC взята точка M такая, что $BM : MC = 2 : 5$. Биссектриса BL данного треугольника и отрезок AM пересекаются в точке P под углом 90° .

а) Найдите отношение площади треугольника ABP к площади четырёхугольника $LPMS$.

б) На отрезке MC отмечена точка F такая, что $MF : FC = 1 : 4$. Пусть дополнительно известно, что прямые LF и BC перпендикулярны. Найдите угол CBL .

$$9; 40^\circ; \arccos \frac{14}{3\sqrt{21}}$$

27. («Физтех», 2015, 10–11) Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O . Две окружности Ω_1 и Ω_2 равных радиусов с центрами O_1 и O_2 вписаны в углы BAD и $B CD$ соответственно, при этом первая касается стороны AD в точке K , а вторая касается стороны BC в точке T .

а) Найдите радиус окружности Ω_1 , если $AK = 2$, $CT = 8$.

б) Пусть дополнительно известно, что точка O_2 является центром окружности, описанной около треугольника BOC . Найдите угол BDC .

$$\frac{7}{1+\sqrt{2}} \arctan \pi - \pi \text{ или } \frac{7}{1-\sqrt{2}} \arctan \pi \quad (6) \quad \text{а)}$$

28. («Физтех», 2015, 10–11) В углы A и B треугольника ABC вписаны соответственно окружности с центрами O_1 и O_2 равного радиуса, точка O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC . Данные окружности касаются стороны AB в точках K_1 , K_2 и K соответственно, при этом $AK_1 = 4$, $BK_2 = 6$ и $AB = 16$.

а) Найдите длину отрезка AK .

б) Пусть окружность с центром O_1 касается стороны AC в точке K_3 . Найдите угол CAB , если известно, что точка O_1 является центром окружности, описанной около треугольника OK_1K_3 .

$$\frac{9}{2} \arccos \frac{5}{3} = \frac{5}{3} \arcsin \frac{7}{2} \quad (6) \quad \frac{5}{32} \quad \text{а)}$$

29. («Физтех», 2014) Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD . Окружность ω радиуса 2, центр O которой лежит на диагонали BD , касается отрезков BC , CD и AD в точках M , N и K соответственно. Известно, что $BM = 3$, а четырёхугольник $K O B A$ вписан в окружность Ω . Найдите угол COD , площадь трапеции $ABCD$ и радиус окружности Ω .

$$\frac{9}{2\sqrt{5}}, 26, 006$$

30. («Физтех», 2014) Четырёхугольник $ABKD$ вписан в окружность Ω радиуса $\sqrt{17}$. На стороне KD выбрана точка C так, что $\angle BCD = 90^\circ$. Окружность ω радиуса 4, описанная вокруг треугольника BCK , касается отрезка AD и прямой AB . Найдите длину отрезка AB , угол BAD и площадь четырёхугольника $ABCD$.

$$2, 2 \arctan \frac{2}{3} = \pi - \arccos \frac{5}{3} \quad \frac{232}{25}$$

31. («Физтех», 2013) В параллелограмме $ABCD$ угол ADC равен $\arcsin \frac{\sqrt{24}}{5}$. Окружность Ω , проходящая через точки A , C и D , пересекает стороны AB и BC в точках N и L соответственно, причём $AN = 11$, $BL = 6$. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$ и радиус окружности Ω .

$$S = 60\sqrt{6}, R = \frac{4\sqrt{6}}{5}$$

32. («Физтех», 2013) Дана прямоугольная трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD , причём $BC < AD$, $\angle BCD = 90^\circ$. Точка M — середина отрезка CD . Известно, что окружность радиуса 5 проходит через точки A и B и касается стороны CD в точке M , а $\cos \angle BMC = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Найдите длины отрезков AB и BC , а также площадь трапеции.

$$AB = 10, BC = \frac{6}{10}, S = \frac{6}{200\sqrt{2}}$$

33. («Физтех», 2012) Две окружности разных радиусов касаются внешним образом. К ним проведены две общие внешние касательные AC и BD . Их точки касания с меньшей окружностью — A и B , с большей окружностью — C и D . Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AB = 24/5$, $AC = 12$.

$$3 \text{ и } 12$$

34. («Физтех», 2012) В трапеции $ABCD$ основание BC равно 5, боковая сторона AB равна 10. Биссектриса угла BAD пересекает сторону CD в точке E , а прямую BC — в точке F , причём $AE \perp CD$, $EF = 4$. Найдите длины отрезков AE и AD , а также площадь трапеции.

$$AE = 12, AD = 15, S = 96$$

35. («Физтех», 2011) В параллелограмме $ABCD$ окружность радиуса $1/4$ с центром на отрезке CD проходит через точку D и касается отрезка BC в точке E такой, что угол BED равен $\arctg \frac{4}{3}$. Найдите высоту параллелограмма DF , проведённую к стороне BC , и длину отрезка CD . Найдите площадь параллелограмма, если $AB = BE$.

$$DF = 8/25, CD = 24/25, S = 16/25$$

36. («Физтех», 2011) В треугольнике ABC окружность радиуса $\frac{13}{3}$ с центром на отрезке BC проходит через точку B и касается отрезка AC в точке D такой, что угол ADB равен $\arctg \frac{3}{2}$. Найдите высоту BF треугольника ABC и длину отрезка CD . Найдите площадь треугольника ABC , если длины отрезков AB и CD равны.

$$BF = 6, CD = \frac{5}{2}, S = \frac{5}{2}(\sqrt{45} + 9)$$

37. («Физтех», 2010) В равнобедренном треугольнике ABC основание AC равно 1, угол ABC равен $2 \arctg \frac{1}{2}$. Точка D лежит на стороне BC так, что площадь треугольника ABC вчетверо больше площади треугольника ADC . Найдите расстояние от точки D до прямой AB и радиус окружности, описанной около треугольника ADC .

$$\frac{3}{\sqrt{265}}, \frac{2\sqrt{5}}{32}$$

38. («Физтех», 2010) В трапецию $ABCD$ можно вписать окружность. Длины её боковых сторон AB и CD равны соответственно 3 и 5, а длина основания AD больше длины BC . Средняя линия трапеции делит её на две части, отношение площадей которых равно $5/11$. Найдите радиус вписанной в трапецию окружности и длины её диагоналей.

$$R = \frac{3}{4}\sqrt{14}, AC = \sqrt{2}, BC = \frac{3}{10}\sqrt{10}, AD = 2\sqrt{\frac{3}{2}}$$

39. («Физтех», 2009) Медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке O , а их длины равны соответственно 30, 24 и 18. Найдите площади треугольников ABC и OA_1C , а также радиус окружности, описанной около треугольника OA_1C .

$$288, 48, \frac{4}{25}$$

40. («Физтех», 2009) В треугольнике ABC точка D лежит на стороне AC , а точка E лежит на отрезке AD . Известно, что углы ABE , DBE и CBD равны, а длина отрезка DE вдвое меньше длины отрезка CD и втрое меньше длины отрезка AE . Найдите углы ABE и ACB .

$$\angle ABE = 45^\circ, \angle ACB = \arctg \frac{7}{1}$$

41. («Физтех», 2008) В треугольнике ABC медиана BM равна 2, угол ABM равен $\arctg \frac{2}{3}$, угол CBM равен $\arctg \frac{1}{5}$. Найдите стороны AB , BC и биссектрису BE треугольника ABC .

$$AB = \frac{4}{\sqrt{13}}, BC = \frac{\sqrt{2}}{8}, BE = \frac{8\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{\sqrt{13}(1+2\sqrt{2})}$$

42. («Физтех», 2007) Окружность ω с центром O на стороне AC треугольника ABC касается сторон AB и BC в точках D и E соответственно. Известно, что $AD = 2CE$, а угол DOE равен $\operatorname{arctg} \frac{1}{3}$. Найти углы треугольника ABC и отношение его площади к площади круга, ограниченного окружностью ω .

$$\angle ABC = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{3}{4}; \angle ACB = \frac{\pi}{4}; \angle BAC = \operatorname{arctg} 2; \frac{S_{\omega}}{S_{ABC}} = \frac{6\pi}{2\sqrt{10}+7}$$