

Плоские множества

1. (Всеросс., 2015, I этап, 8) На координатной плоскости есть точки, координаты (x, y) которых удовлетворяют уравнению $y(x+1) = x^2 - 1$. Например, одна из них — точка с координатами $(1, 0)$. Изобразите *все* точки, координаты (x, y) которых удовлетворяют этому уравнению.

Плоская прямая

2. (Всеросс., 2015, I этап, 10) Постройте график функции $y = \frac{x^2}{|x|}$.

3. (Всеросс., 2015, I этап, 11) Постройте график функции $y = \frac{\sin x}{|\sin x|}$.

4. (Всеросс., 2014, I этап, 10–11) Постройте график функции $y = (\sqrt{x})^2 + (\sqrt{x-1})^2$.

5. (Всеросс., 2015, I этап, 9) Постройте график уравнения

$$x^2 - y^4 = \sqrt{18x - x^2 - 81},$$

то есть изобразите на координатной плоскости *все* точки, координаты (x, y) которых удовлетворяют этому уравнению.

Плоская точка

6. («Физтех», 2016, 9) Изобразите на плоскости (x, y) множество точек, координаты которых удовлетворяют системе

$$\begin{cases} (|x| + x)^2 + (|y| - y)^2 \leq 16, \\ y - 3x \leq 0, \end{cases}$$

и найдите площадь полученной фигуры.

$\pi + \frac{8}{27}$

7. («Физтех», 2016, 9–10) Изобразите на плоскости (x, y) множество точек, удовлетворяющих уравнению

$$|5x| + |12y| + |60 - 5x - 12y| = 60,$$

и найдите площадь полученной фигуры.

0.8

8. («Физтех», 2016, 10) Изобразите на плоскости (x, y) множество точек, удовлетворяющих уравнению

$$|16 + 6x - x^2 - y^2| + |6x| = 16 + 12x - x^2 - y^2,$$

и найдите площадь полученной фигуры.

$12 + 25\pi - 4\sqrt{5} \arcsin \frac{5}{4}$

9. («Физтех», 2016, 11) Дана система уравнений

$$\begin{cases} |9 + 8y - x^2 - y^2| + |8y| = 16y + 9 - x^2 - y^2, \\ (a + 4)x - 13y + a = 0. \end{cases}$$

а) Изобразите на плоскости (x, y) множество точек, удовлетворяющих первому уравнению системы, и найдите площадь полученной фигуры.

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система имеет ровно одно решение.

$$\boxed{12 + 25\pi - 25 \arcsin \frac{5}{8}; -6, -9} \quad \text{а)}$$

10. («Физтех», 2016, 11) Дана система уравнений

$$\begin{cases} |15x| + |8y| + |120 - 15x - 8y| = 120, \\ \left(x - 4 \cos \frac{a\pi}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{15}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+2}{4}\right)^2. \end{cases}$$

а) Изобразите на плоскости (x, y) множество точек, удовлетворяющих первому уравнению системы, и найдите площадь полученной фигуры.

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система имеет ровно три решения.

$$\boxed{32, 60; 9; 9} \quad \text{в)}$$

11. («Физтех», 2017, 10) а) Изобразите на координатной плоскости фигуру Φ , координаты точек которой удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 - y^2 \leq 2(x - y), \\ x^2 + y^2 \leq 4(x + y - 1). \end{cases}$$

б) Найдите площадь фигуры Φ и расстояние от точки $T(0, 4)$ до ближайшей точки фигуры Φ .

$$\boxed{2\pi - 2\sqrt{2}; 2} \quad \text{г)}$$

12. («Физтех», 2017, 10) Изобразите на плоскости фигуру Φ , состоящую из точек (x, y) координатной плоскости таких, что выполнена система неравенств

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 3y^2 + 4x + 4} \leq 2x + 1, \\ x^2 + y^2 \leq 4. \end{cases}$$

Определите, из скольких частей состоит фигура Φ .

13. («Высшая проба», 2014, 10–11) На координатной плоскости нарисовано множество точек, заданное уравнением $x = y^2$. Окружность радиуса 5 с центром в точке $(11, 1)$ пересекает это множество в точках A, B, C и D . Докажите, что все точки A, B, C, D лежат на одной параболе, т. е. на кривой, задаваемой уравнением $y = ax^2 + bx + c$, и найдите уравнение этой параболы.

$$\boxed{\frac{7}{16} + x \frac{7}{12} - 2x \frac{7}{1} = 6} \quad \text{д)}$$

14. («Высшая проба», 2017, 10) Парабола $x = y^2$ пересекается с некоторой окружностью в четырёх точках. Докажите, что эти четыре точки лежат на некоторой параболе, задаваемой уравнением $y = ax^2 + bx + c$, или на паре параллельных прямых.

15. (ОММО, 2009) Пусть x и y удовлетворяют системе

$$\begin{cases} y - x \leq 5, \\ y + 4x \leq -5, \\ 3y + 2x \geq -5. \end{cases}$$

Найдите все значения, которые может принимать функция $x^2 + y^2$.

[17; $\frac{41}{25}$]

16. («Ломоносов», 2011, 10–11) Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости системой

$$\begin{cases} \sqrt{1-x} + 2x \geq 0, \\ -1 - x^2 \leq y \leq 2 + \sqrt{x}. \end{cases}$$

4

17. («Покори Воробьёвы горы!», 2011, 10–11) Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством

$$||x| - 6| + ||y| - 7| \leq 10.$$

002

18. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11) Найдите все значения y , при каждом из которых ни одно значение x , удовлетворяющее неравенству

$$\log_2 (|x| + |y|) \leq 2,$$

не удовлетворяет неравенству

$$\log_{\frac{1}{2}} (|x| + |y + 4|) \geq -2.$$

($\infty + ; 0$] \cap [$4 - ; \infty -$)

19. (ОММО, 2010) Изобразите на координатной плоскости множество точек (a, b) таких, что система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ x + y = b \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

|a| \geq |b|

20. (ОММО, 2011) Плоская фигура W представляет собой множество всех точек, координаты которых (x, y) удовлетворяют неравенству

$$(|x| + |4 - |y|| - 4)^2 \leq 4.$$

Нарисуйте фигуру W и найдите её площадь.

121

21. («Ломоносов», 2007) Определите, под каким углом видно из начала координат (т. е. внутри какого наименьшего угла с вершиной в точке $(0, 0)$ помещается) множество, заданное на координатной плоскости неравенством

$$14x^2 + xy + y^2 + 14x + 2y + 4 < 0.$$

$\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \text{ град}$

22. («Высшая проба», 2012, 9) При каких значениях b , $b \neq 3$, объединение парабол $y = x^2$ и $y = (b - 3)x^2 + bx + 2b - 4$ имеет ось или центр симметрии?

$b \in \{0, 2, 4\}$

23. («Высшая проба», 2012, 10) Сколько точек, обе координаты которых натуральны, лежит строго внутри области, ограниченной графиком функции $y = -x^3 + 30x^2 - 300,6x + 2012$ и осями координат?

19101

24. («Высшая проба», 2012, 11) При каком значении параметра a график многочлена

$$x^4 - 6x^3 + 12x^2 + ax$$

симметричен относительно прямой $x = c$ для какого-нибудь значения константы c ?

$6 - a$

25. («Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11) Гипербола $y = 5/x$ пересекается с прямой $2x + y = 12$ в точках A и B , а с прямой $x + 2y = 8$ — в точках C и D . Найдите координаты точки, равноудалённой от точек A , B и C .

(8; 2)