Педальный треугольник

Рассмотрим треугольник ABC и точку P. Пусть A_1, B_1 и C_1 — основания перпендикуляров, опущенных из точки P на прямые BC, CA и AB соответственно. Треугольник $A_1B_1C_1$ называется *педальным треугольником* точки P относительно треугольника ABC.

Рассматриваем также точки A_p, B_p, C_p, в которых прямые AP, BP, CP (соответственно) вторично пересекают описанную окружность треугольника ABC.

Удобно пользоваться обозначениями: $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$; a_1, b_1, c_1 — стороны педального треугольника; a_p, b_p, c_p — стороны треугольника $A_pB_pC_p$; $x_a = PA$, $x_b = PB$, $x_c = PC$ и $y_a = PA_p$, $y_b = PB_p$, $y_c = PC_p$.

Задача 1. Докажите, что

$$a_1 = \frac{ax_a}{2R}\,, \quad b_1 = \frac{bx_b}{2R}\,, \quad c_1 = \frac{cx_c}{2R}\,,$$

где R — радиус описанной окружности треугольника ABC.

Задача 2. Докажите, что $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_pB_pC_p$.

Задача 3. Опустив из точки P перпендикуляры на стороны педального треугольника, получим *второй педальный треугольник*; повторив это, получим *третий педальный треугольник*. Докажите, что третий педальный треугольник подобен треугольнику ABC.

Задача 4. (*Теорема Эйлера для педального треугольника*) Пусть S — площадь треугольника ABC, а S_1 — площадь педального треугольника точки P относительно $\triangle ABC$. Докажите, что

$$S_1 = \frac{1}{4}\left|1 - \frac{d^2}{R^2}\right| S,$$

где R — радиус описанной окружности треугольника ABC, а d — расстояние от точки P до центра этой окружности.

Следствие. Педальный треугольник точки P относительно $\triangle ABC$ является вырожденным тогда и только тогда, когда точка P лежит на описанной окружности $\triangle ABC$. (Вершины вырожденного педального треугольника расположены на *прямой Симсона*.)

Задача 5. Пусть прямая ℓ_A проходит через середины отрезков PA и B_1C_1. Аналогично определяются прямые ℓ_B и ℓ_C. Докажите, что прямые ℓ_A, ℓ_B и ℓ_C пересекаются в одной точке.

Задача 6. *Педальная окружность* — это окружность, описанная около педального треугольника. Пусть точки P и Q изогонально сопряжены относительно треугольника ABC. Докажите, что их педальные окружности совпадают. Докажите также, что стороны педального треугольника точки P перпендикулярны прямым QA, QB, QC.

Задача 7. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Докажите, что педальная окружность точки D относительно треугольника ABC проходит через точку O.

Задача 8. (*Турнир городов, 1996, 8–9*) Докажите, что внутри остроугольного треугольника существует такая точка, что основания перпендикуляров, опущенных из неё на стороны, являются вершинами равностороннего треугольника.

Задача 9. (*Всеросс. по геометрии, 2011*) Дан остроугольный треугольник ABC. Найдите на сторонах BC, CA, AB такие точки A', B', C', чтобы наибольшая сторона треугольника $A'B'C'$ была минимальна.

Задача 10. (*Всеросс. по геометрии, 2013, 9.4*) Дан треугольник ABC и такая точка F, что $\angle AFB = \angle BFC = \angle CFA$. Прямая, проходящая через F и перпендикулярная BC, пересекает медиану, проведённую из вершины A, в точке A_1. Точки B_1 и C_1 определяются аналогично. Докажите, что A_1, B_1 и C_1 являются тремя вершинами правильного шестиугольника, три другие вершины которого лежат на сторонах треугольника ABC.

Задача 11. (*Теорема Штейнера*) Даны два треугольника ABC и $A'B'C'$. Перпендикуляры, опущенные из точек A, B, C на прямые $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ пересекаются в одной точке. Докажите, что тогда перпендикуляры, опущенные из точек A', B', C' на прямые BC, CA, AB, тоже пересекаются в одной точке.