Параметр как переменная

В некоторых задачах бывает полезно воспринять параметр как отдельную переменную и решать данное уравнение или неравенство относительно параметра.

Задача 1. Найти все a, при которых неравенство

$$\frac{x-2a-1}{x-a}<0$$

выполнено при всех x, удовлетворяющих условию $1 \leqslant x \leqslant 2$.

Решение. В предыдущей статье «Рациональные уравнения и неравенства с параметрами» эта задача была решена с помощью обычного метода интервалов.

А теперь давайте поменяем ролями x и a: воспримем a как переменную, а x — как параметр. Перепишем наше неравенство следующим образом:

$$\frac{a-\frac{x-1}{2}}{a-x}<0, \tag{1}$$

и будем решать неравенство (1) относительно a.

Ясно, что при $x \in [1;2]$ имеем $\frac{x-1}{2}<x$, поэтому множество решений неравенства (1) есть

$$\frac{x-1}{2}<a<x. \tag{2}$$

Когда x меняется от 1 до 2, величина $\frac{x-1}{2}$ меняется от 0 до $\frac{1}{2}$. Чтобы найти множество A всех значений a, удовлетворяющих условию (2) **при всех** $x \in [1;2]$, нужно взять пересечение всех интервалов $\left(\frac{x-1}{2};x\right)$ при x пробегающем значения от 1 до 2. Получим:

$$A=\bigcap_{x\in[1;2]}\left(\frac{x-1}{2};x\right)=\left(\frac{1}{2};1\right).$$

Ответ: $a \in \left(\frac{1}{2};2\right)$.

Задача 2. (*МГУ, мехмат, 1992*) Найти все x, при которых неравенство

$$(a+2)x^3-(1+2a)x^2-6x+a^2+4a-5>0$$

выполняется хотя бы для одного $a \in [-2;1]$.

Решение. Данное неравенство, будучи кубическим относительно x, является квадратным по a. Поэтому давайте перепишем его следующим образом:

$$a^2+\left(x^3-2x^2+4\right)a+2x^3-x^2-6x-5>0.$$

Обозначим

$$f(a)=a^2+\left(x^3-2x^2+4\right)a+2x^3-x^2-6x-5,$$

где x играет роль параметра. Нам нужно выяснить, при каких x функция $f(a)$ принимает положительное значение хотя бы в одной точке отрезка $[-2;1]$.

Эти искомые значения x мы назовём *хорошими*. Назовём *плохими* все остальные x; иными словами, плохими являются все те значения x, при которых выполнено

$$f(a) \leqslant 0 \text{ для любого } a \in [-2; 1]. \tag{3}$$

В нашей задаче проще искать плохие значения x (а потом найти хорошие как дополнения плохих до множества $\mathbb{R}$). Дело в том, что множество плохих x описывается очень просто. Поскольку коэффициент перед a^2 у функции $f(a)$ положителен, *для выполнения условия* (3) *необходимо и достаточно, чтобы выполнялась система неравенств*

$$\begin{cases} f(-2) \leqslant 0, \\ f(1) \leqslant 0 \end{cases} \tag{4}$$

(см. статью «Квадратные уравнения и неравенства с параметрами. 2»).

Имеем:

$$\begin{aligned} f(-2) &= 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3), \\ f(1) &= 3x^3 - 3x^2 - 6x = 3x(x+1)(x-2), \end{aligned}$$

так что система (4) принимает вид:

$$\begin{cases} (x+1)(x-3) \leqslant 0, \\ x(x+1)(x-2) \leqslant 0. \end{cases}$$

Решения данной системы легко находим методом интервалов:

$$x = -1, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2. \tag{5}$$

Это и есть множество плохих значений x. Искомое множество хороших значений x есть дополнение до $\mathbb{R}$ множества (5):

$$x < -1, \quad -1 < x < 0, \quad x > 2.$$

Ответ: $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (2; +\infty)$.