Симметрия в задачах с параметрами

Симметрия — одно из ключевых понятий математики и физики. Вы знакомы с геометрической симметрией фигур и вообще различных объектов природы. Однако математические представления о симметрии распространяются гораздо шире: оказывается, например, что можно говорить о симметрии некоторых уравнений. Так, уравнения, выражающие фундаментальные физические законы, обладают определённой симметрией; это свидетельствует о том, что симметрия принадлежит к числу наиболее глубоких свойств нашего мира.

Что же такое симметрия уравнений? Мы не будем сейчас стремиться к строгим определениям и ограничимся следующим описанием. *Если при некотором преобразовании переменных уравнение не меняет своего вида («переходит само в себя»), то мы говорим, что это уравнение симметрично относительно данного преобразования*[1].

Почему бывает важно замечать симметрию уравнений? Дело в том, что если уравнение обладает некоторой симметрией, то такой же симметрией обладают и все его решения. Значит, *не решая уравнение и исходя лишь из соображений симметрии, мы можем заранее предвидеть некоторые свойства его решений*!

Допустим, например, что требуется найти такие значения параметра, при которых уравнение имеет заданное число решений. Тогда, заметив симметрию данного уравнения, мы сможем получить необходимые условия на параметр, и останется лишь проверить, какие из найденных условий являются достаточными.

Задача 1. (*МГУ, мехмат, 1990*) Найдите все значения параметра b, при которых уравнение

$$b^2x^2 - b\,\mathrm{tg}(\cos x) + 1 = 0 \tag{1}$$

имеет единственное решение.

Решение. Обратите внимание, что уравнение (1) не меняет своего вида при замене x на $-x$ (ведь x^2 и $\cos x$ — чётные функции). Иными словами, уравнение (1) симметрично относительно преобразования $x \mapsto -x$ (то есть относительно отражения в начале координат).

Следовательно, данной симметрией будут обладать и решения нашего уравнения. Именно, если x_0 — корень уравнения (1), то и число $-x_0$ будет его корнем; иначе говоря, решения уравнения (1) расположены симметрично относительно нуля. Вместе с тем, в задаче требуется, чтобы решение было только одно.

Единственная возможность — корнем уравнения (1) является нуль, и только он. В самом деле, если уравнение имеет ненулевое решение, то всего решений будет как минимум два. Подставляя $x = 0$ в уравнение (1), получим

$$-b\,\mathrm{tg}\,1 + 1 = 0,$$

откуда

$$b = \mathrm{ctg}\,1. \tag{2}$$

[1]Мы сейчас не делаем различия между уравнениями и системами уравнений. Да его, в общем-то, и нет; например, система уравнений

$$\begin{cases} f(x,y) = 0, \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

равносильна уравнению $|f(x,y)| + |g(x,y)| = 0$. Поэтому, говоря о симметрии уравнений, мы имеем в виду также и симметрию систем уравнений.

Это — *необходимое* условие на b (только при таком b наше уравнение может иметь нулевое решение). Теперь вопрос в том, является ли это условие *достаточным*; то есть, окажется ли при $b = \operatorname{ctg} 1$ нулевое решение и в самом деле единственным, или же уравнение (1) будет иметь и другие корни помимо нуля.

Для выяснения достаточности условия (2) подставим данное значение b в уравнение (1):

$$\operatorname{ctg}^2 1 \cdot x^2 - \operatorname{ctg} 1 \cdot \operatorname{tg}(\cos x) + 1 = 0.$$

Перепишем это следующим образом:

$$\frac{\operatorname{tg}(\cos x)}{\operatorname{tg} 1} = 1 + \frac{x^2}{\operatorname{tg}^2 1}\,. \tag{3}$$

Тангенс является возрастающей функцией на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Косинус, являющийся аргументом тангенса, принимает значения из отрезка $[-1; 1]$, а этот отрезок находится внутри интервала $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Следовательно, справедливо неравенство $\operatorname{tg}(\cos x) \leqslant \operatorname{tg} 1$, то есть левая часть уравнения (3) не превосходит 1. В то же время правая часть (3) не меньше 1, и равенство возможно лишь в том случае, когда обе они равны 1, то есть при $x = 0$.

Итак, мы показали, что условие (2) является достаточным: при $b = \operatorname{ctg} 1$ уравнение (1) имеет единственное (нулевое) решение.

Ответ: $b = \operatorname{ctg} 1$.

Задача 2. (*МГУ, химический ф-т, 2002*) Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$9^{-x+1} \cdot 3^{x^2} + a^3 + 5a^2 + a + \sqrt{2} = \sin\frac{\pi x}{4} + \cos\frac{\pi x}{4} + 3$$

имеет единственное решение.

Решение. Обозначим $b = a^3 + 5a^2 + a$. Имеем:

$$9 \cdot 3^{x(x-2)} + b + \sqrt{2} = \sin\frac{\pi x}{4} + \cos\frac{\pi x}{4} + 3. \tag{4}$$

Оказывается, данное уравнение не меняет своего вида при замене x на $2 - x$ (это отражение в точке $x = 1$). В самом деле, посмотрим, как преобразуются выражения с переменной при преобразовании $x \mapsto 2 - x$:

$$x(x-2) \mapsto (2-x)(2-x-2) = (x-2)x;$$
$$\sin\frac{\pi x}{4} + \cos\frac{\pi x}{4} \mapsto \sin\frac{\pi(2-x)}{4} + \cos\frac{\pi(2-x)}{4} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{4}\right) =$$
$$= \cos\frac{\pi x}{4} + \sin\frac{\pi x}{4}\,.$$

Итак, уравнение (4) симметрично относительно преобразования $x \mapsto 2 - x$. Следовательно, если x_0 — корень уравнения (4), то и $2 - x_0$ также будет его корнем. Поэтому единственным решением уравнения (4) может быть только неподвижная точка преобразования $x \mapsto 2 - x$:

$$x = 2 - x \quad \Rightarrow \quad x = 1.$$

Подставляя $x = 1$ в уравнение (4), получим:

$$3 + b + \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + 3,$$

откуда $b = 0$. Это — необходимое условие единственности решения уравнения (4), и теперь надо выяснить, является ли оно достаточным.

Подставляем $b = 0$ в уравнение (4):

$$9 \cdot 3^{x(x-2)} + \sqrt{2} = \sin\frac{\pi x}{4} + \cos\frac{\pi x}{4} + 3,$$

или

$$3^{1+(x-1)^2} - 3 = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi x}{4} + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}\,. \tag{5}$$

Левая часть уравнения (5) неотрицательна, а правая часть — неположительна. Поэтому равенство возможно лишь в том случае, когда обе части одновременно равны нулю, то есть при $x = 1$. Тем самым показано, что при $b = 0$ уравнение (4) в самом деле имеет единственное решение $x = 1$.

Остаётся найти соответствующие значения параметра a:

$$a^3 + 5a^2 + a = 0 \quad\Leftrightarrow\quad a(a^2 + 5a + 1) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad a = 0, \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}\,.$$

Ответ: $a = 0, \frac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$.

Задача 3. Найти все значения a, при которых уравнение

$$x + \frac{1}{x} + \frac{a}{1 + \left|x - \frac{1}{x}\right|} = a^2 \tag{6}$$

имеет единственное решение.

Решение. Легко видеть, что уравнение (6) не меняет своего вида при преобразовании $x \mapsto \frac{1}{x}$ (такое преобразование называется инверсией). Следовательно, наряду с решением x_0 имеется также решение $\frac{1}{x_0}$, и поэтому единственным решением уравнения (6) может быть лишь неподвижная точка нашего преобразования:

$$x = \frac{1}{x} \quad\Rightarrow\quad x = \pm 1.$$

Подставляя $x = -1$ в уравнение (6), получим $a^2 - a + 2 = 0$; тут корней нет. Подставляя $x = 1$ в уравнение (6), получим $a^2 - a - 2 = 0$, то есть $a = -1$ или $a = 2$. Это — необходимые условия на параметр a. Проверим, достаточны ли они.

Пусть $a = -1$. Тогда уравнение (6) примет вид:

$$x + \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{1 + \left|x - \frac{1}{x}\right|}\,. \tag{7}$$

Если $x < 0$, то левая часть уравнения (7) отрицательна, а правая часть положительна, так что решений быть не может. Если же $x > 0$, то левая часть (7) не меньше 2 (как сумма двух взаимно обратных положительных чисел), а правая часть — не больше 2 (поскольку к единице прибавляется дробь, не превосходящая единицу). Следовательно, равенство (7) возможно лишь тогда, когда обе части одновременно равны 2, то есть при $x = 1$. Итак, $a = -1$ годится: в этом случае уравнение (6) действительно имеет единственное решение $x = 1$.

Пусть теперь $a = 2$. Уравнение (6) примет вид:

$$x + \frac{1}{x} + \frac{2}{1 + \left|x - \frac{1}{x}\right|} = 4. \tag{8}$$

Рассмотрим функцию в левой части уравнения (8):

$$f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{2}{1 + \left|x - \frac{1}{x}\right|}\,.$$

Мы видим, что $f(1) = 4$, и теперь нас интересует, является ли $x = 1$ единственным корнем уравнения $f(x) = 4$.

Нетрудно понять, что это не так. В самом деле, имеем $f(4) > 4$ и в то же время $f(2) = \frac{33}{10} < 4$. Функция f непрерывна при $x \neq 0$, и поэтому на интервале $(2; 4)$ найдётся значение x, при котором выполнено равенство $f(x) = 4$. Значит, условие $a = 2$ не является достаточным для единственности решения, и потому значение $a = 2$ не годится.

Ответ: $a = -1$.

Задача 4. (*МГУ, химический ф-т, 2005*) При каких значениях параметра a уравнение

$$|x| + \left|\frac{2x-1}{3x-2}\right| = a \tag{9}$$

имеет ровно три решения?

Решение. Оказывается, симметрией уравнения (9) служит преобразование

$$x \mapsto \frac{2x-1}{3x-2}\,. \tag{10}$$

В самом деле, при этом преобразовании первое слагаемое левой части уравнения переходит во второе, а второе слагаемое — в первое:

$$\frac{2x-1}{3x-2} \mapsto \frac{2\frac{2x-1}{3x-2} - 1}{3\frac{2x-1}{3x-2} - 2} = \frac{2(2x-1) - (3x-2)}{3(2x-1) - 2(3x-2)} = x.$$

Уравнение (9) при преобразовании (10) переходит само в себя, так что наряду с решением x_0 будет и решение $\frac{2x_0-1}{3x_0-2}$. Поэтому для того, чтобы решений было ровно три, необходимо, чтобы одним из решений была неподвижная точка нашего преобразования:

$$x = \frac{2x-1}{3x-2} \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - 4x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1 \text{ или } x = \frac{1}{3}\,.$$

Подставляя поочерёдно $x = 1$ и $x = \frac{1}{3}$ в уравнение (9), получаем соответственно $a = 2$ и $a = \frac{2}{3}$. Это — необходимые условия на параметр a. Теперь надо проверить их достаточность, то есть подставить полученные значения a в уравнение (9) и выяснить, действительно ли получается ровно три решения (а не какое-то другое нечётное число) в каждом из этих случаев.

Пусть $a = 2$. Уравнение (9) примет вид:

$$|x| + \left|\frac{2x-1}{3x-2}\right| = 2. \tag{11}$$

Решаем данное уравнение, снимая модули на промежутках $(-\infty; 0]$, $\left[0; \frac{1}{2}\right]$, $\left[\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right)$ и $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

1. $x > \frac{2}{3}$ или $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$. Тогда

$$x + \frac{2x-1}{3x-2} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 6x + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1.$$

Условие $x > \frac{2}{3}$ выполнено, так что $x = 1$ — корень уравнения (11).

2. $\frac{1}{2} \leqslant x < \frac{2}{3}$. Тогда

$$x - \frac{2x-1}{3x-2} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 10x + 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{5 \pm \sqrt{10}}{3}.$$

Первый корень $\frac{5+\sqrt{10}}{3}$ больше 1 и потому не принадлежит рассматриваемому промежутку. Для второго корня имеем оценки:

$$\frac{5-\sqrt{10}}{3} - \frac{1}{2} = \frac{7-2\sqrt{10}}{6} = \frac{\sqrt{49}-\sqrt{40}}{6} > 0;$$
$$\frac{5-\sqrt{10}}{3} - \frac{2}{3} = \frac{3-\sqrt{10}}{3} = \frac{\sqrt{9}-\sqrt{10}}{3} < 0.$$

Таким образом, число $\frac{5-\sqrt{10}}{3}$ принадлежит рассматриваемому промежутку и потому является корнем уравнения (11).

3. $x \leqslant 0$. Тогда

$$-x + \frac{2x-1}{3x-2} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 + 2x - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{10}}{3}.$$

Рассматриваемому промежутку принадлежит число $\frac{-1-\sqrt{10}}{3}$, которое, таким образом, является корнем уравнения (11).

Итак, уравнение (11) имеет ровно три корня, так что значение $a = 2$ подходит. Точно так же убеждаемся (сделайте это самостоятельно!), что и в случае $a = \frac{2}{3}$ тоже получается ровно три корня. Здесь оба необходимых условия оказались к тому же достаточными.

Ответ: $a = 2$ или $a = \frac{2}{3}$.

Задача 5. При каких значениях a система

$$\begin{cases} ax^2 + a - 1 = y - |\sin x|, \\ \operatorname{tg}^2 x + y^2 = 1 \end{cases} \tag{12}$$

имеет единственное решение?

Решение. Система не меняет своего вида при замене x на $-x$; иными словами, система (12) симметрична относительно преобразования $(x, y) \mapsto (-x, y)$ (которое является отражением координатной плоскости относительно оси ординат). Следовательно, наряду с решением (x_0, y_0) система (12) будет иметь также решение $(-x_0, y_0)$, и поэтому случай единственного решения возможен лишь при $x_0 = 0$ (то есть когда решением системы служит неподвижная точка преобразования, расположенная на оси ординат).

Подставляя в (12) значение $x = 0$, получим систему

$$\begin{cases} a - 1 = y, \\ y^2 = 1, \end{cases}$$

из которой легко находим $a = 2$ или $a = 0$. Это необходимые условия единственности решения; проверим, являются ли они достаточными.

Пусть $a = 2$. Тогда система (12) примет вид:

$$\begin{cases} 2x^2 + 1 = y - |\sin x|, \\ \operatorname{tg}^2 x + y^2 = 1 \end{cases} \tag{13}$$

Из второго уравнения (13) мы видим, что $|y| \leqslant 1$. Поэтому для правой части первого уравнения имеем оценку: $y - |\sin x| \leqslant 1$. В то же время его левая часть: $2x^2 + 1 \geqslant 1$, так что равенство в первом уравнении (13) возможно лишь в случае одновременного равенства обеих частей единице, то есть при $x = 0$, $y = 1$. Пара $(0, 1)$ удовлетворяет также второму уравнению и потому является единственным решением системы (13). Стало быть, значение $a = 2$ нам подходит.

Пусть теперь $a = 0$. Система (12) примет вид:

$$\begin{cases} -1 = y - |\sin x|, \\ \operatorname{tg}^2 x + y^2 = 1. \end{cases}$$

Можно указать два решения полученной системы: $(0, -1)$ и $(\pi, -1)$. Следовательно, значение $a = 0$ не годится.

Ответ: $a = 2$.

Задача 6. (*МГУ, филологич. ф-т, 2002*) Найти все a, при которых система

$$\begin{cases} y \geqslant (x-a)^2, \\ x \geqslant (y-a)^2 \end{cases} \tag{14}$$

имеет единственное решение.

Решение. Заметим, что система (14) переходит сама в себя при замене x на y и y на x. Иными словами, наша система симметрична относительно преобразования $(x, y) \mapsto (y, x)$, которое является отражением координатной плоскости относительно прямой $y = x$ (рис. 1).

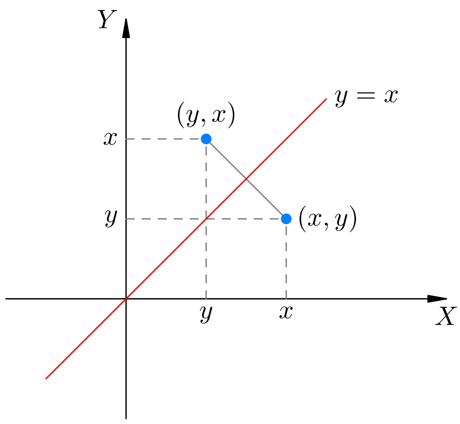

Рис. 1. Отражение $(x, y) \mapsto (y, x)$

Следовательно, наряду с решением (x_0, y_0) система имеет также решение (y_0, x_0). Поэтому для того, чтобы система (14) имела единственное решение, необходимо, чтобы выполнялось равенство $x_0 = y_0$ (то есть чтобы решением системы служила неподвижная точка преобразования, расположенная на прямой $y = x$).

Полагая в системе $y = x$, получим неравенство

$$x \geqslant (x-a)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - (2a+1)x + a^2 \leqslant 0. \tag{15}$$

Но на прямой $y = x$ должна быть лишь одна точка, являющаяся решением нашего неравенства; поэтому полученное квадратное неравенство (15) должно иметь единственное решение. Значит, дискриминант должен обратиться в нуль:

$$D = (2a+1)^2 - 4a^2 = 0,$$

откуда $a = -\frac{1}{4}$. Это — необходимое условие на параметр, и нужно проверить его достаточность.

Подставляем $a = -\frac{1}{4}$ в систему (14):

$$\begin{cases} y \geqslant \left(x + \dfrac{1}{4}\right)^2, \\ x \geqslant \left(y + \dfrac{1}{4}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 + \dfrac{x}{2} - y + \dfrac{1}{16} \leqslant 0, \\ y^2 + \dfrac{y}{2} - x + \dfrac{1}{16} \leqslant 0. \end{cases}$$

Сложим неравенства полученной системы:

$$x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{16} + y^2 - \frac{y}{2} + \frac{1}{16} \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2 \leqslant 0.$$

Единственным решением данного неравенства будет пара $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$. Она же будет единственным решением системы (14) при $a = -\frac{1}{4}$, что мы и хотели проверить.

Ответ: $a = -\frac{1}{4}$.

Во всех рассмотренных задачах наблюдалась симметрия относительно какого-то одного преобразования. Однако симметрий может быть несколько!

Задача 7. Найти все значения a, при которых система

$$\begin{cases} |x| + |y| = 1, \\ x^2 + y^2 = a \end{cases} \tag{16}$$

имеет ровно четыре решения.

Решение. Система не меняет своего вида, если заменить x на $-x$, или y на $-y$, или поменять местами x и y. Иными словами, система (16) симметрична относительно преобразований

$$(x, y) \mapsto (-x, y), \quad (x, y) \mapsto (x, -y), \quad (x, y) \mapsto (y, x).$$

Следовательно, если (x_0, y_0) — решение системы (16), то решениями будут также пары $(-x_0, y_0)$, $(x_0, -y_0)$, $(-x_0, -y_0)$, (y_0, x_0), $(-y_0, x_0)$, $(y_0, -x_0)$, $(-y_0, -x_0)$. Все эти пары получаются в результате последовательных отражений исходной точки относительно координатных осей и прямых $y = \pm x$ (рис. 2).

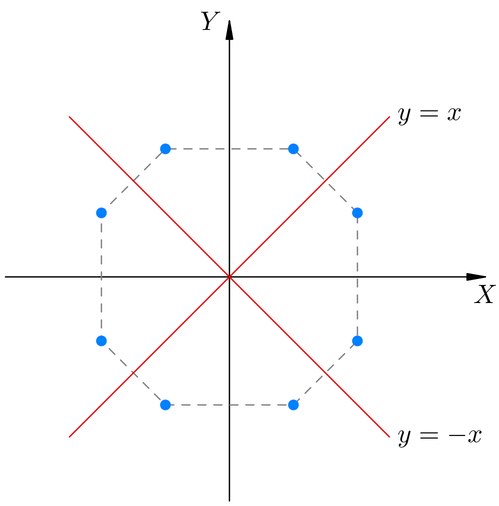

Рис. 2. Симметрия решений системы (16)

Таким образом, если система (16) имеет решение, расположенное вне прямых $x = 0$, $y = 0$, $y = \pm x$, то у этой системы будет не менее восьми решений. Ровно четыре решения система может иметь лишь в том случае, когда она имеет решение, расположенное на одной из прямых $x = 0$, $y = 0$, $y = \pm x$ (тогда восьмиугольник вырождается в квадрат, рис. 3).

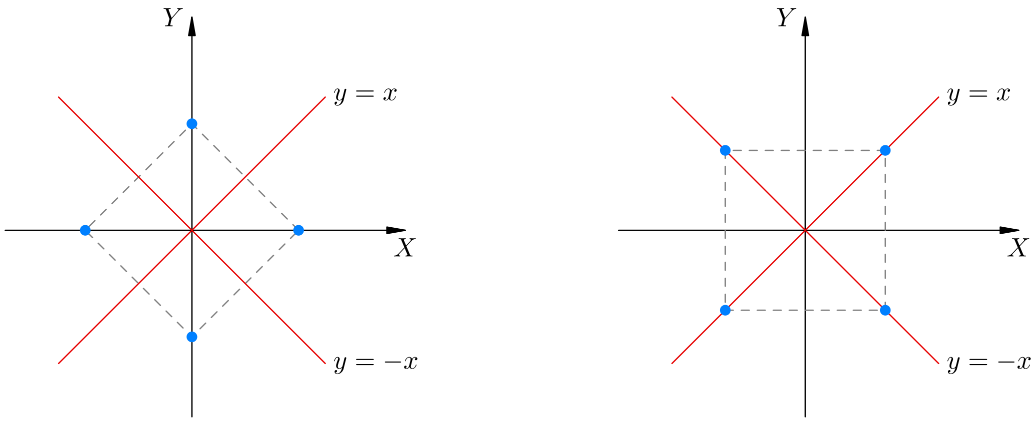

Рис. 3. Система (16) имеет ровно четыре решения

Если $x = 0$ или $y = 0$, то из системы (16) получаем $a = 1$. Если же $y = \pm x$ (то есть $|y| = |x|$), то из системы (16) получаем $a = \frac{1}{2}$. Это необходимые условия на параметр. Остаётся проверить, достаточны ли они.

Пусть $a = 1$. Тогда система (16) примет вид:

$$\begin{cases} |x| + |y| = 1, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases} \tag{17}$$

Делаем замену $u = |x|$, $v = |y|$:

$$\begin{cases} u + v = 1, \\ u^2 + v^2 = 1. \end{cases}$$

Решаем эту систему и убеждаемся, что у неё ровно два решения: $u = 1$, $v = 0$ и $u = 0$, $v = 1$. Эти две пары (u, v) дают ровно четыре пары (x, y) решений системы (17): $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(0, -1)$. Таким образом, значение $a = 1$ годится.

Пусть теперь $a = \frac{1}{2}$. Тогда система (16) примет вид:

$$\begin{cases} |x| + |y| = 1, \\ x^2 + y^2 = \dfrac{1}{2}\,. \end{cases} \tag{18}$$

Снова делаем замену $u = |x|$, $v = |y|$:

$$\begin{cases} u + v = 1, \\ u^2 + v^2 = \dfrac{1}{2}\,. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение $u = v = \frac{1}{2}$, которое даёт ровно четыре решения системы (18): $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. Следовательно, значение $a = \frac{1}{2}$ также является подходящим.

Ответ: $a = 1$ или $a = \frac{1}{2}$.