Рациональные уравнения и неравенства с параметрами

Напомним, что *рациональной функцией* называется отношение двух многочленов. Уравнение или неравенство называется *рациональным*, если в нём рациональная функция сравнивается с нулём (или с другой рациональной функцией).

При решении рациональных уравнений нужно считаться с тем, что знаменатели дробей могут обращаться в нуль. Рациональные неравенства решаются методом интервалов.

Задача 1. При всех значениях параметра a решить уравнение

$$\frac{x-a}{x^2-3x+2}=0.$$

Решение. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x-a=0, \\ x^2-3x+2\neq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=a, \\ x\neq 1,2. \end{cases}$$

Ответ: Если $a\neq 1,2$, то $x=a$; если $a=1$ или $a=2$, то решений нет.

Задача 2. При каких a уравнение

$$\frac{x^2+ax+1}{x-2}=0$$

имеет единственный корень?

Решение. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^2+ax+1=0, \\ x\neq 2. \end{cases}$$

Данная система будет иметь единственное решение в одном из двух случаев:

1) уравнение системы имеет единственный корень, не равный 2;
2) уравнение системы имеет два корня, один из которых равен 2.

Первый случай отвечает нулевому дискриминанту: $D=a^2-4=0$, то есть $a=\pm 2$. Если $a=2$, то уравнение системы имеет корень $x=-1$; аналогично, если $a=-2$, то $x=1$. В обоих случаях имеем $x\neq 2$, так что значения $a=\pm 2$ подходят.

Во втором случае давайте просто подставим $x=2$ в уравнение системы: $4+2a+1=0$, откуда $a=-\frac{5}{2}$. Тем самым мы нашли (единственное) значение a, при котором уравнение системы имеет корень $x=2$. При данном a уравнение системы принимает вид $x^2-\frac{5}{2}x+1=0$, и второй его корень $x=\frac{1}{2}$. Это значение x и будет единственным корнем исходного уравнения.

Ответ: $a=\pm 2, -\frac{5}{2}$.

Задача 3. (*МГУ, химический ф-т, 2003*) Найдите все значения параметра a, при которых множество решений неравенства

$$\frac{a}{x-a}>0$$

содержит точку $x=1$.

Решение. Если $a=0$, то данное неравенство принимает вид $\frac{0}{x}>0$ и решений не имеет.

Если $a > 0$, то множество решений неравенства есть $x > a$. Это множество содержит точку $x = 1$ при $a < 1$. Итак, в данном случае имеем подходящие a: $0 < a < 1$.

Если $a < 0$, то множество решений неравенства есть $x < a$. Это множество состоит из отрицательных чисел и не может содержать точку $x = 1$. Поэтому никакое $a < 0$ не годится.

Ответ: $a \in (0; 1)$.

Задача 4. Найти все a, при которых неравенство

$$\frac{x - 2a - 1}{x - a} < 0$$

выполнено при всех x, удовлетворяющих условию $1 \leqslant x \leqslant 2$.

Решение. Методом интервалов легко устанавливаем, что решения данного неравенства расположены между точками a и $2a + 1$. Точнее, имеем три случая — в зависимости от того, какое из чисел (a или $2a + 1$) больше.

1. При $a < -1$ имеем $2a+1 < a$, так что множество решений неравенства есть $2a+1 < x < a$. Это множество состоит только из отрицательных чисел и потому не может содержать отрезок $[1; 2]$. Следовательно, в рассматриваемом случае подходящих значений a нет.

2. Если $a = -1$, то неравенство не имеет решений. Это значение a не годится.

3. При $a > -1$ имеем $a < 2a+1$, так что множество решений неравенства есть $a < x < 2a+1$. Отрезок $[1; 2]$ будет содержаться в этом множестве при выполнении системы неравенств

$$\begin{cases} a < 1, \\ 2 < 2a + 1, \end{cases}$$

то есть при $\frac{1}{2} < a < 2$. Все эти a удовлетворяют неравенству $a > -1$ и, следовательно, подходят.

Ответ: $a \in \left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

В следующей статье «Параметр как переменная» мы рассмотрим другой способ решения этой задачи, в котором параметр a играет роль отдельной переменной.