Квадратные уравнения и неравенства с параметрами. 3

В данной статье мы рассматриваем задачи с параметрами, так или иначе сводящиеся к исследованию квадратных уравнений и неравенств. Никакой дополнительной теории уже не будет; используется материал, который вы усвоили в результате работы с предыдущими двумя статьями (и соответствующими задачниками):

$\to$ Квадратные уравнения и неравенства с параметрами. 1;
$\to$ Квадратные уравнения и неравенства с параметрами. 2.

Теперь изученные вами методы будут применяться в новых ситуациях.

Задача 1. (*МГУ, ВМК, 2003*) При всех значениях параметра c решите уравнение

$$4^x + c \cdot 25^x = 3 \cdot 10^x.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде:

$$2^{2x} - 3 \cdot 2^x \cdot 5^x + c \cdot 5^{2x} = 0.$$

Величина 5^{2x} не обращается в нуль ни при каком x, поэтому, деля обе части данного уравнения на 5^{2x}, приходим к равносильному уравнению

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{2x} - 3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^x + c = 0.$$

Делаем замену $t = \left(\frac{2}{5}\right)^x$:

$$t^2 - 3t + c = 0. \qquad (1)$$

Когда исходная переменная x пробегает множество $\mathbb{R}$, новая переменная t пробегает множество $(0; +\infty)$. Поэтому мы должны искать положительные корни уравнения (1).

Дискриминант уравнения (1): $D = 9 - 4c$. Имеем три случая.

1. $D < 0$. Так будет при $c > \frac{9}{4}$, и в этом случае уравнение (1) не имеет корней.

2. $D = 0$. Так будет при $c = \frac{9}{4}$. В этом случае уравнение (1) имеет единственный корень $t = \frac{3}{2}$, которому отвечает значение $x = \log_{\frac{2}{5}} \frac{3}{2}$.

3. $D > 0$. Так будет при $c < \frac{9}{4}$. В этом случае уравнение (1) имеет два различных корня:

$$t_1 = \frac{3 + \sqrt{9 - 4c}}{2}, \quad t_2 = \frac{3 - \sqrt{9 - 4c}}{2}.$$

   Корень t_1 положителен при всех рассматриваемых c; данному корню отвечает значение $x = \log_{\frac{2}{5}} \frac{3+\sqrt{9-4c}}{2}$.

   Корень t_2 положителен при $c > 0$, и тогда ему отвечает значение $x = \log_{\frac{2}{5}} \frac{3-\sqrt{9-4c}}{2}$. Если же $c \leqslant 0$, то $t_2 \leqslant 0$, и в таком случае корню t_2 не отвечает никакое значение x.

Остаётся собрать все случаи и записать ответ.

Ответ: Если $c \leqslant 0$, то $x = \log_{\frac{2}{5}} \frac{3+\sqrt{9-4c}}{2}$; если $c \in \left(0; \frac{9}{4}\right)$, то $x = \log_{\frac{2}{5}} \frac{3\pm\sqrt{9-4c}}{2}$; если $c = \frac{9}{4}$, то $x = \log_{\frac{2}{5}} \frac{3}{2}$; если $c > \frac{9}{4}$, то решений нет.

Задача 2. (*Олимпиада «Покори Воробъёвы горы», 2010*) При каких значениях параметра a неравенство

$$3 \cdot 4^x - 6a \cdot 2^x + 3a^2 + 2a - 14 < 0$$

не имеет решений?

Решение. Делая замену $t = 2^x$, получим неравенство

$$3t^2 - 6at + 3a^2 + 2a - 14 < 0. \qquad (2)$$

Когда переменная x пробегает множество $\mathbb{R}$, переменная t пробегает множество $(0; +\infty)$. Следовательно, мы можем решать задачу, эквивалентную исходной: найти все значения параметра a, при которых неравенство (2) не имеет *положительных* решений.

Прежде всего найдём дискриминант[1]:

$$D = 9a^2 - 3(3a^2 + 2a - 14) = 42 - 6a.$$

Пусть $D \leqslant 0$, то есть

$$a \geqslant 7. \qquad (3)$$

В этом случае функция $f(t) = 3t^2 - 6at + 3a^2 + 2a - 14$ обращается в нуль не более чем в одной точке и поэтому не принимает отрицательных значений. Следовательно, неравенство (2) не имеет решений, и множество (3) нам подходит.

Пусть теперь $D > 0$, то есть $a < 7$. Тогда наш квадратный трёхчлен $f(t)$ имеет два различных корня:

$$t_1 = \frac{3a - \sqrt{42 - 6a}}{3}, \quad t_2 = \frac{3a + \sqrt{42 - 6a}}{3},$$

и множеством решений неравенства (2) служит интервал $(t_1; t_2)$. Значит, неравенство (2) не будет иметь положительных решений в том и только в том случае, если больший корень неположителен: $t_2 \leqslant 0$.

Здесь проще действовать «в лоб», используя явное выражение для t_2. Имеем, таким образом, неравенство:

$$\frac{3a + \sqrt{42 - 6a}}{3} \leqslant 0,$$

или

$$\sqrt{42 - 6a} \leqslant -3a.$$

Последнее неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 42 - 6a \leqslant 9a^2, \\ a \leqslant 0, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3a^2 + 2a - 14 \geqslant 0, \\ a \leqslant 0. \end{cases}$$

Решение этой системы труда не представляет, и мы получаем:

$$a \leqslant \frac{-1 - \sqrt{43}}{3}. \qquad (4)$$

Все эти значения a находятся внутри множества $a < 7$ (в рамках которого мы сейчас находимся), поэтому для получения ответа остаётся объединить множества (4) и (3).

Ответ: $a \in \left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{43}}{3}\right] \cup [7; +\infty)$.

[1] Величину $D/4$ мы для удобства также называем дискриминантом и обозначаем D.

Задача 3. При каких p уравнение $\sin^2 x + p\sin x = p^2 - 1$ имеет решения?

Решение. Замена $t = \sin x$ приводит к квадратному уравнению относительно t:

$$t^2 + pt - p^2 + 1 = 0. \tag{5}$$

Когда переменная x пробегает множество $\mathbb{R}$, переменная t пробегает множество $[-1; 1]$. Поэтому имеем эквивалентную переформулировку исходной задачи: при каких p уравнение (5) имеет корни на отрезке $[-1; 1]$?

Уравнение (5) будет иметь корни при неотрицательном дискриминанте $D = 5p^2 - 4$. Мы отдельно рассмотрим случаи $D = 0$ и $D > 0$.

Пусть сначала $D = 0$, тогда

$$p = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}. \tag{6}$$

В этом случае уравнение (5) имеет единственный корень $t_0 = -\frac{p}{2}$, то есть $t_0 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ при $p = \frac{2}{\sqrt{5}}$ или $t_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ при $p = -\frac{2}{\sqrt{5}}$. Оба этих значения t_0 принадлежат отрезку $[-1; 1]$, поэтому оба значения (6) нам подходят.

Пусть теперь $D > 0$, тогда

$$p < -\frac{2}{\sqrt{5}}, \quad p > \frac{2}{\sqrt{5}}. \tag{7}$$

При таких значениях p уравнение (5) имеет два различных корня. Требуется, чтобы хотя бы один из них был расположен на отрезке $[-1; 1]$. Эта ситуация исчерпывается следующими тремя вариантами:

1) оба корня принадлежат интервалу $(-1; 1)$;
2) один корень принадлежит интервалу $(-1; 1)$, а второй корень лежит вне отрезка $[-1; 1]$;
3) один из корней равен 1 или -1.

Первый вариант описывается условиями, которые подробно обсуждались в предыдущей статье «Квадратные уравнения и неравенства с параметрами. 2». Именно, оба корня принадлежат интервалу $(-1; 1)$ в том и только в том случае, если значения функции

$$f(t) = t^2 + pt - p^2 + 1$$

на концах данного интервала положительны, а абсцисса вершина параболы $y = f(t)$ лежит внутри интервала:

$$\begin{cases} f(-1) > 0, \\ f(1) > 0, \\ -1 < -\dfrac{p}{2} < 1, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} p^2 + p - 2 < 0, \\ p^2 - p - 2 < 0, \\ -2 < p < 2. \end{cases}$$

Решением полученной системы является множество

$$-1 < p < 1. \tag{8}$$

Второй вариант расположения (когда один корень принадлежит $(-1; 1)$, а второй не принадлежит $[-1; 1]$) реализуется тогда и только тогда, когда функция $f(t)$ принимает на концах отрезка значения разных знаков: $f(-1) \cdot f(1) < 0$.

Третий вариант расположения (когда один из корней равен ± 1) характеризуется равенствами $f(-1) = 0$ или $f(1) = 0$, которые объединяются в одно равенство $f(-1) \cdot f(1) = 0$.

И теперь мы можем объединить второй и третий вариант, описав их оба одним условием:

$$f(-1) \cdot f(1) \leqslant 0.$$

В результате получаем неравенство:

$$(p^2+p-2)(p^2-p-2) \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad (p+2)(p+1)(p-1)(p-2) \leqslant 0,$$

которое легко решается методом интервалов:

$$-2 \leqslant p \leqslant -1, \quad 1 \leqslant p \leqslant 2. \tag{9}$$

Напомним, что сейчас мы находимся в рамках случая $D > 0$. Чтобы получить подходящие значения p для этого случая, нужно объединить множества (8) и (9), после чего пересечь это объединение с множеством (7). В результате получим:

$$-2 \leqslant p < -\frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \frac{2}{\sqrt{5}} < p \leqslant 2.$$

Теперь для получения окончательного ответа нужно к данному множеству добавить значения (6), возникшие в рамках случая $D = 0$.

Ответ: $p \in \left[-2; -\frac{2}{\sqrt{5}}\right] \cup \left[\frac{2}{\sqrt{5}}; 2\right]$.

Задача 4. При каких a уравнение $4^{\sin x} + a \cdot 2^{\sin x} + a^2 - 1 = 0$ не имеет корней?

Решение. Замена $t = 2^{\sin x}$ приводит к квадратному уравнению относительно t:

$$t^2 + at + a^2 - 1 = 0. \tag{10}$$

Когда переменная x пробегает множество $\mathbb{R}$, величина $\sin x$ пробегает отрезок $[-1; 1]$, а переменная t пробегает соответственно отрезок $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$. Поэтому исходное уравнение не имеет корней тогда и только тогда, когда уравнение (10) не имеет корней на отрезке $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

Прежде всего найдём дискриминант уравнения (10):

$$D = 4 - 3a^2.$$

Нас устраивает, в частности, случай $D < 0$, когда уравнение (10) вообще не имеет корней. В этом случае имеем:

$$a < -\frac{2}{\sqrt{3}}, \quad a > \frac{2}{\sqrt{3}}. \tag{11}$$

Эти значения a нам подходят.

Теперь рассмотрим случай $D = 0$, то есть $a = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$. Тогда уравнение (10) имеет единственный корень $t_0 = -\frac{a}{2}$. Если $a = -\frac{2}{\sqrt{3}}$, то $t_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$, что нас не устраивает; следовательно, $a = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ не годится. Если же $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$, то $t_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \notin \left[\frac{1}{2}; 2\right]$, и поэтому значение

$$a = \frac{2}{\sqrt{3}} \tag{12}$$

нам подходит.

Наконец, перейдём к случаю $D > 0$, то есть

$$-\frac{2}{\sqrt{3}} < a < \frac{2}{\sqrt{3}}. \tag{13}$$

Уравнение (10) имеет два различных корня, и оба они должны находиться вне отрезка $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$. Здесь логически возможны три варианта:

1) оба корня лежат слева от этого отрезка;
2) оба корня лежат справа от этого отрезка;
3) оба корня расположены по разные стороны от этого отрезка.

Первый вариант (оба корня меньше $\frac{1}{2}$) реализуется тогда и только тогда когда выполнены следующие условия (снова см. «Квадратные уравнения и неравенства с параметрами. 2»):

$$\begin{cases} f\left(\dfrac{1}{2}\right) > 0, \\ t_0 < \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

где $f(t) = t^2 + at + a^2 - 1$ и t_0 — абсцисса вершины параболы $y = f(t)$. Имеем:

$$\begin{cases} a^2 + \dfrac{a}{2} - \dfrac{3}{4} > 0, \\ -\dfrac{a}{2} < \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a^2 + 2a - 3 > 0, \\ a > -1. \end{cases}$$

Множество решений полученной системы:

$$a > \frac{\sqrt{13} - 1}{4}. \tag{14}$$

Аналогично, второй вариант (оба корня больше 2) характеризуется системой неравенств

$$\begin{cases} f(2) > 0, \\ t_0 > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2a + 3 > 0, \\ a < -4. \end{cases}$$

Первое неравенство системы выполнено при всех a, поэтому имеем здесь

$$a < -4. \tag{15}$$

Наконец, третий вариант (отрезок $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$ расположен между корнями) характеризуется следующей системой:

$$\begin{cases} f\left(\dfrac{1}{2}\right) < 0, \\ f(2) < 0. \end{cases}$$

Второе неравенство этой системы имеет вид $a^2 + 2a + 3 < 0$ и решений не имеет; вместе с ним не имеет решений и вся система. Значит, третий вариант не реализуется.

Теперь, чтобы получить подходящие a в рамках нашего случая $D > 0$, нужно объединить множества (14) и (15), и полученное объединение пересечь с множеством (13). Получим:

$$\frac{\sqrt{13} - 1}{4} < a < \frac{2}{\sqrt{3}}. \tag{16}$$

(Очевидно, $\frac{\sqrt{13}-1}{4} < \frac{2}{\sqrt{3}}$ поскольку $\frac{\sqrt{13}-1}{4} < 1$ и $\frac{2}{\sqrt{3}} > 1$.)

Для получения окончательного ответа объединяем найденные множества значений a в случаях $D < 0$, $D = 0$ и $D > 0$, то есть множества (11), (12) и (16).

Ответ: $a \in \left(-\infty; -\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{13}-1}{4}; +\infty\right)$.

Задача 5. (*МГУ, МШЭ, 2007*) При каких значениях параметра a уравнение

$$16^x - 3\cdot 2^{3x+1} + 2\cdot 4^{x+1} - (4-4a)\cdot 2^{x-1} - a^2 + 2a - 1 = 0$$

имеет три различных корня?

Решение. Перепишем уравнение так:

$$2^{4x} - 6\cdot 2^{3x} + 8\cdot 2^{2x} + 2(a-1)\cdot 2^x - (a-1)^2 = 0.$$

Делаем замену $t = 2^x$ и, кроме того, вводим новый параметр $b = a - 1$:

$$t^4 - 6t^3 + 8t^2 + 2bt - b^2 = 0.$$

Наш единственный шанс справиться с уравнением четвёртой степени — искать разложение левой части на множители. Преобразуем её следующим образом[2]:

$$\begin{aligned} t^4 - 6t^3 + 8t^2 + 2bt - b^2 &= t^4 - 6t^3 + 9t^2 - t^2 + 2bt - b^2 = t^2(t^2 - 6t + 9) - (t^2 - 2bt + t^2) = \\ &= t^2(t-3)^2 - (t-b)^2 = (t(t-3) - (t-b))\,(t(t-3) + (t-b)) = \\ &= (t^2 - 4t + b)(t^2 - 2t - b). \end{aligned}$$

Таким образом, приходим к уравнению:

$$(t^2 - 4t + b)(t^2 - 2t - b) = 0. \tag{17}$$

Когда x пробегает множество $\mathbb{R}$, переменная t пробегает множество $(0; +\infty)$. Поэтому эквивалентная переформулировка исходной задачи такова: при каких b уравнение (17) имеет три различных положительных корня?

Уравнение (17) равносильно совокупности двух квадратных уравнений:

$$t^2 - 4t + b = 0, \tag{18}$$

$$t^2 - 2t - b = 0, \tag{19}$$

и имеет самое большее четыре корня.

Отметим сразу, что уравнение (17) не может иметь четырёх положительных корней (а такой случай логически возможен: ведь в условии исходной задачи не сказано, что корней должно быть *ровно три*). В самом деле, произведение корней уравнения (18) равно b, а произведение корней уравнения (19) равно $-b$; эти два произведения не могут быть одновременно положительными ни при каком b.

Если дискриминант хотя бы одного из уравнений (18), (19) отрицателен, то совокупность этих уравнений имеет самое большее два корня. Следовательно, оба дискриминанта должны быть неотрицательными:

$$\begin{cases} 4 - b \geqslant 0, \\ 1 + b \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad -1 \leqslant b \leqslant 4.$$

Более того, случаи равенства нулю какого-либо дискриминанта исключаются. В самом деле, если $b = -1$, то уравнение (18) принимает вид $t^2 - 4t - 1 = 0$ и имеет ровно один положительный корень (поскольку произведение корней равно -1), а уравнение (19) принимает вид $(t-1)^2 = 0$ и также имеет ровно один положительный корень (равный 1); всего получается два

[2] На экзамене нижеследующие выкладки можно оставить в черновике, а в чистовике просто написать: «Нетрудно проверить, что $t^4 - 6t^3 + 8t^2 + 2bt - b^2 = (t^2 - 4t + b)(t^2 - 2t - b)$». Не смущайтесь, ничего криминального тут нет. Вы не обязаны объяснять, как получено это равенство. Каждый может убедиться в его справедливости непосредственным вычислением — и точка.

положительных корня, так что $b = -1$ не годится. Если же $b = 4$, то уравнение (18) принимает вид $(t-2)^2 = 0$ и имеет ровно один положительный корень, а уравнение (19) принимает вид $t^2 - 2t - 4 = 0$ и также имеет ровно один положительный корень; снова получаются только два положительных корня, и $b = 4$ также не годится.

Таким образом, мы ограничены множеством

$$-1 < b < 4 \tag{20}$$

возможных значений параметра b. При этих b оба дискриминанта положительны, и каждое уравнение (18), (19) имеет два корня.

Выясним, при каких b уравнения (18) и (19) могут иметь общий корень. Запишем систему этих уравнений:

$$\begin{cases} t^2 - 4t + b = 0, \\ t^2 - 2t - b = 0, \end{cases}$$

и вычтем из первого второе: $-2t + 2b = 0$, то есть $t = b$. Подставляя это в любое из уравнений системы, получим $b^2 - 3b = 0$, откуда $b = 0$ или $b = 3$. Оба этих значения b принадлежат множеству (20) и поэтому будут ниже рассмотрены отдельно.

Итак, последовательно рассматриваем случаи, исчерпывающие всё множество (20) возможных значений b.

- $-1 < b < 0$.

  Уравнение (18) имеет ровно один положительный корень (поскольку произведение корней равно $b < 0$).

  Уравнение (19) имеет два положительных корня (поскольку сумма корней равна $2 > 0$ и произведение корней равно $-b > 0$).

  Всего получается три различных положительных корня (совпадений корней нет, так как в рассматриваемом случае $b \neq 0, 3$). Следовательно, интервал $-1 < b < 0$ нам подходит.

- $b = 0$.

  Уравнения (18) и (19) принимают вид $t^2 - 4t = 0$ и $t^2 - 2t = 0$ соответственно. Их совокупность имеет два положительных корня (2 и 4), так что $b = 0$ не годится.

- $0 < b < 3$ и $3 < b < 4$.

  Уравнение (18) имеет два положительных корня, уравнение (19) имеет ровно один положительный корень. Всего имеем три положительных корня (совпадений нет), так что интервалы $0 < b < 3$ и $3 < b < 4$ нам подходят.

- $b = 3$.

  Уравнение (18) принимает вид $t^2-4t+3 = 0$ и имеет корни 1 и 3. Уравнение (19) принимает вид $t^2 - 2t - 3 = 0$ и имеет корни -1 и 3. Всего получается два положительных корня, так что $b = 3$ не подходит.

Итак, подходящие интервалы значений b: $-1 < b < 0$, $0 < b < 3$, $3 < b < 4$. Вспоминая, что $a = b + 1$, получаем искомое множество значений параметра a: $0 < a < 1$, $1 < a < 4$, $4 < a < 5$.

Ответ: $a \in (0; 1) \cup (1; 4) \cup (4; 5)$.