Квадратные уравнения и неравенства с параметрами. 2

Данная статья посвящена вопросам расположения корней квадратного трёхчлена в зависимости от параметра. Вычисление корней при этом может приводить к техническим трудностям в решении задач. Более удобный подход — формулировать необходимые и достаточные условия требуемого расположения корней.

Прежде всего напомним некоторые стандартные факты. Выражение $ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, называется *квадратным трёхчленом*. Функция

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0) \tag{1}$$

называется *квадратичной*. Её график получается параллельным переносом параболы $y = ax^2$; вершина параболы при этом сдвигается из начала координат в некоторую точку. В какую?

Для нахождения координат вершины параболы выделим в (1) полный квадрат:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(x^2 + 2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c =$$
$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}\,.$$

В числителе последней дроби появляется *дискриминант* $D = b^2 - 4ac$, так что окончательно имеем:

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a}\,. \tag{2}$$

Из выражения (2) мы видим теперь, что координаты вершины параболы:

$$x_0 = -\frac{b}{2a}\,, \quad y_0 = -\frac{D}{4a}\,. \tag{3}$$

Так, на рис. 1 изображена парабола, у которой $a > 0$ (ветви направлены вверх) и $D > 0$.

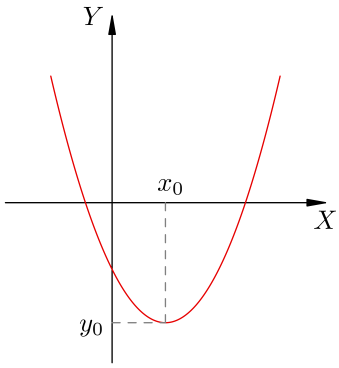

Рис. 1. Парабола с $a > 0$ и $D > 0$

Из этого рисунка становится ясен графический смысл того факта, что при $D > 0$ квадратное уравнение имеет два корня. В самом деле, если, например, $a > 0$, то из (3) мы видим, что $y_0 < 0$; то есть, ветви параболы направлены вверх, а вершина параболы находится ниже оси X. Следовательно, парабола обязана пересечь ось X в двух различных точках — а это и означает, что соответствующее квадратное уравнение имеет два различных корня.

И теперь мы приходим к замечательно простой идее. Ведь для существования двух корней не важно, что ниже оси X лежит именно вершина параболы: вместо вершины можно взять любую другую точку! Таким образом, имеем следующее утверждение.

Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a > 0$. Если для некоторого числа t выполнено неравенство $f(t) < 0$, то квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два различных корня.

На практике в качестве t удобно бывает проверить числа 0, 1 или −1.

Задача 1. Докажите, что уравнение $(a^2 - a + 1)x^2 + (2a^2 + 10a + 3)x - 4a^2 - 9a - 5 = 0$ имеет два различных корня при любом a.

Решение. Заниматься здесь вычислением дискриминанта и его дальнейшим исследованием — не самое приятное занятие. Вместо этого давайте используем идею, изложенную выше.

Прежде всего мы видим, что коэффициент при x^2 всегда положителен: $a^2 - a + 1 > 0$ при всех a. Теперь обозначим $f(x)$ левую часть нашего уравнения и заметим, что

$$f(1) = a^2 - a + 1 + 2a^2 + 10a + 3 - 4a^2 - 9a - 5 = -a^2 - 1,$$

то есть $f(1) < 0$ при любом a. Отсюда и вытекает, что при каждом a наше уравнение имеет два различных корня.

В дальнейшем мы будем постоянно использовать известные вам утверждения о знаках квадратичной функции. Именно, пусть квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ имеет корни x_1 и x_2 ($x_1 < x_2$). Тогда имеет место разложение на множители: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, и с помощью метода интервалов мы приходим к следующим выводам.

- Если $a > 0$, то значения функции $f(x)$ положительны при $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ и отрицательны при $x \in (x_1; x_2)$.
- Если $a < 0$, то значения функции $f(x)$ положительны при $x \in (x_1; x_2)$ и отрицательны при $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$.

Переходим к рассмотрению задач, где требуется выяснить расположение корней квадратного трёхчлена относительно некоторой точки.

Задача 2. При каких значениях параметра a один корень уравнения $x^2 + ax + 4 = 0$ меньше 2, а другой больше 2?

Решение. Пусть x_1 и x_2 — корни нашего уравнения. Графиком функции $f(x) = x^2 + ax + 4$ является парабола, пересекающая ось X в точках x_1 и x_2. Поскольку коэффициент перед x^2 положителен, интервал $(x_1; x_2)$ есть множество решений неравенства $f(x) < 0$. Следовательно, если точка $x = 2$ лежит между корнями, то выполнено неравенство $f(2) < 0$ (рис. 2).

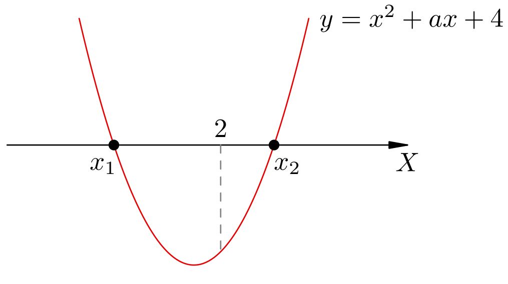

Рис. 2. К задаче 2

Наоборот, пусть выполнено неравенство $f(2) < 0$. Как мы уже знаем, это гарантирует существование двух корней нашего квадратного уравнения (поскольку ветви параболы направлены вверх). При этом ясно, что меньший корень будет меньше 2, а больший корень — больше 2.

Итак, мы приходим к следующему утверждению (по-прежнему $f(x) = x^2+ax+4$). *Для того, чтобы корни уравнения $f(x) = 0$ лежали по разные стороны от точки $x = 2$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $f(2) < 0$.*

Остаётся закончить решение:

$$f(2) = 4 + 2a + 4 < 0,$$

откуда $a < -4$.

Ответ: $a < -4$.

Задача 3. При каких значениях a один корень уравнения $ax^2 + 2x + 2a + 1 = 0$ меньше 1, а другой больше 1?

Решение. Как и выше, обозначаем $f(x)$ левую часть нашего уравнения:

$$f(x) = ax^2 + 2x + 2a + 1.$$

Из условия ясно, что $a \neq 0$. Если $a > 0$, то ветви параболы $y = f(x)$ направлены вверх; как мы уже знаем, в этом случае неравенство $f(1) < 0$ служит необходимым и достаточным условием того, что корни нашего уравнения расположены по разные стороны от 1.

Если же $a < 0$, то ветви параболы направлены вниз; теперь точка $x = 1$ лежит между корнями в том и только в том случае, если $f(1) > 0$. Это устанавливается рассуждениями, полностью аналогичными тем, которые были приведены при решении задачи 2.

Обе ситуации изображены на рис. 3.

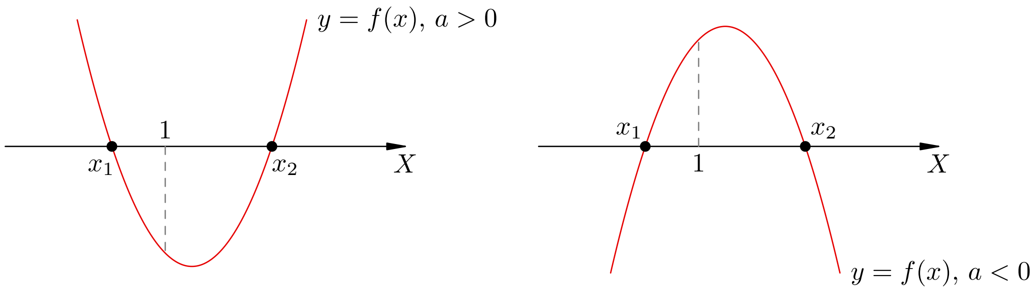

Рис. 3. К задаче 3

Таким образом, для того, чтобы корни нашего уравнения лежали по разные стороны от 1, необходимо и достаточно, чтобы выполнялась совокупность двух систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 0, \\ f(1) < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0, \\ f(1) > 0, \end{cases} \end{array}\right.$$

которая эквивалентна одному-единственному неравенству

$$a \cdot f(1) < 0.$$

Остаётся решить это неравенство:

$$a(3a + 3) < 0 \;\Leftrightarrow\; -1 < a < 0.$$

Ответ: $a \in (-1; 0)$.

Фактически мы установили следующее общее утверждение.

Утверждение 1. Пусть $f(x) = ax^2+bx+c$, $a \neq 0$. Для того, чтобы корни данного квадратного трёхчлена лежали по разные стороны от некоторого числа t, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $a \cdot f(t) < 0$.

Задача 4. При каких a корни уравнения

$$x^2 + 2(a-2)x - 4a + 5 = 0$$

различны и оба больше -1?

Решение. Снова попробуем реализовать ту же идею: не вычисляя корней, сформулируем необходимые и достаточные условия того, что оба они лежат правее -1.

Прежде всего изобразим нашу ситуацию графически (рис. 4). Как и выше, введено обозначение $f(x) = x^2 + 2(a-2)x - 4a + 5$.

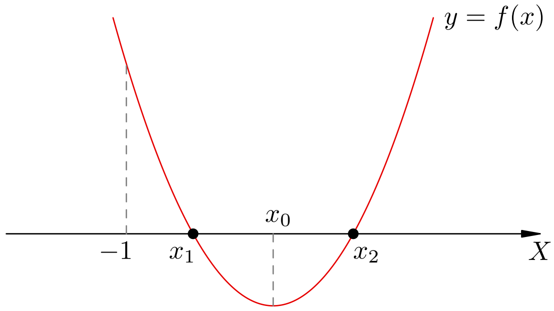

Рис. 4. К задаче 4

Давайте сразу напишем нужные нам условия, а потом поймём, почему они являются необходимыми и достаточными. Эти условия таковы:

$$\begin{cases} D > 0, \\ f(-1) > 0, \\ x_0 > -1. \end{cases} \tag{4}$$

Покажем необходимость условий (4). Пусть оба корня x_1, x_2 нашего уравнения больше -1. Так как эти корни существуют и различны, должно быть выполнено неравенство $D > 0$. Далее, коэффициент перед x^2 положителен, поэтому функция $y = f(x)$ принимает положительные значения на множестве $(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$; стало быть, если $-1 < x_1$, то $f(-1) > 0$. Наконец, поскольку $x_0 > x_1$, то и подавно $x_0 > -1$. Таким образом, три неравенства (4) с необходимостью вытекают из условия задачи.

Теперь покажем достаточность условий (4). Пусть система (4) выполнена. Неравенство $D > 0$ гарантирует наличие двух корней x_1 и x_2 ($x_1 < x_2$). Неравенство $f(-1) > 0$ означает, что точка -1 принадлежит множеству решений неравенства $f(x) > 0$, то есть расположена либо на луче $(-\infty; x_1)$, либо на луче $(x_2; +\infty)$. Неравенство $x_0 > -1$ выбирает нужный луч: в силу этого неравенства имеем $-1 \in (-\infty; x_1)$. Таким образом, оба корня оказываются правее точки -1, то есть система неравенств (4) достаточна для выполнения условия задачи.

Остаётся решить систему (4). Имеем:

$$\begin{cases} a^2 - 1 > 0, \\ 10 - 6a > 0, \\ -(a-2) > -1. \end{cases}$$

Дальнейшее трудностей не представляет.

Ответ: $a \in (-\infty; -1) \cup \left(1; \frac{5}{3}\right)$.

Задача 5. Найти все значения a, при которых все корни уравнения $(2-a)x^2 - 3ax + 2a = 0$ больше $1/2$.

Решение. Если $a = 2$, то получается линейное уравнение $-6x + 4 = 0$, корень которого равен $2/3$. Это больше $1/2$, поэтому $a = 2$ годится.

Пусть $a \neq 2$ и $f(x) = (2-a)x^2 - 3ax + 2a$. В зависимости от знака выражения $2 - a$ ветви параболы $y = f(x)$ направлены вверх или вниз (рис. 5). Пунктиром схематически обозначено положение параболы при $D = 0$ (ведь этот случай тоже следует учесть — не сказано же, что корней два!).

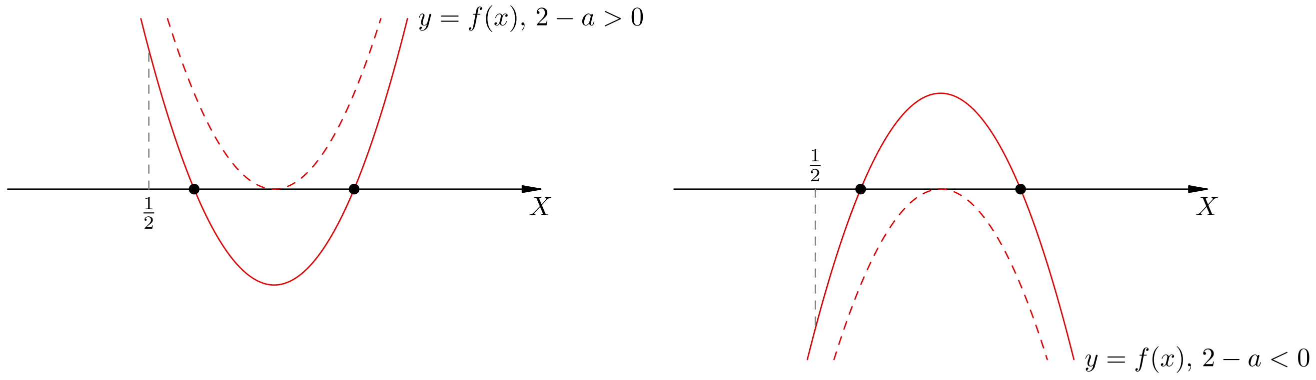

Рис. 5. К задаче 5

Рассуждая, как и в предыдущей задаче, устанавливаем, что корни лежат правее $1/2$ тогда и только тогда, когда выполнена совокупность двух систем условий:

$$\begin{cases} 2 - a > 0, \\ D \geqslant 0, \\ f\left(\dfrac{1}{2}\right) > 0, \\ x_0 > \dfrac{1}{2}, \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} 2 - a < 0, \\ D \geqslant 0, \\ f\left(\dfrac{1}{2}\right) < 0, \\ x_0 > \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Эта совокупность, очевидно, эквивалентна одной системе:

$$\begin{cases} D \geqslant 0, \\ (2-a) \cdot f\left(\dfrac{1}{2}\right) > 0, \\ x_0 > \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Теперь имеем:

$$\begin{cases} 17a^2 - 16a \geqslant 0, \\ (2-a) \cdot \dfrac{a+2}{4} > 0, \\ \dfrac{3a}{2(2-a)} > \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Решением полученной системы служит множество $\frac{16}{17} \leqslant a < 2$. Сюда надо добавить $a = 2$, расмотренное с самого начала.

Ответ: $a \in \left[\frac{16}{17}; 2\right]$.

Фактически мы установили справедливость следующего утверждения.

Утверждение 2. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Для того, чтобы корни данного квадратного трёхчлена были больше некоторого числа t, необходимо и достаточно, чтобы выполнялась следующая система условий:

$$\begin{cases} D \geqslant 0, \\ a \cdot f(t) > 0, \\ x_0 > t. \end{cases} \tag{5}$$

Аналогично, для того, чтобы корни данного квадратного трёхчлена были меньше некоторого числа t, необходимо и достаточно, чтобы выполнялась следующая система условий:

$$\begin{cases} D \geqslant 0, \\ a \cdot f(t) > 0, \\ x_0 < t. \end{cases} \tag{6}$$

Если при этом требуется вдобавок, чтобы корни были различны, то первое неравенство систем (5) и (6) принимает вид $D > 0$.

В задачах 2–5 нас интересовало расположение корней квадратного трёхчлена относительно некоторой точки. Теперь мы рассмотрим несколько задач, где речь идёт о расположении корней квадратного трёхчлена относительно некоторого промежутка.

Задача 6. При каких a корни уравнения $x^2 + ax + 4 = 0$ принадлежат интервалу $(1; 3)$?

Решение. Пусть $f(x) = x^2 + ax + 4$. Изобразим интересующую нас ситуацию (рис. 6).

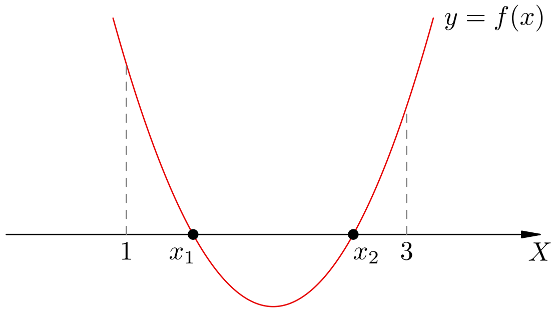

Рис. 6. К задаче 6

Для того, чтобы корни квадратного трёхчлена $f(x)$ лежали между 1 и 3, необходимо и достаточно, чтобы выполнялась следующая система условий:

$$\begin{cases} D \geqslant 0, \\ f(1) > 0, \\ f(3) > 0, \\ 1 < x_0 < 3. \end{cases} \tag{7}$$

Покажем необходимость. Пусть корни x_1, x_2 лежат между 1 и 3. Так как эти корни существуют, выполнено неравенство $D \geqslant 0$ (именно нестрогое, поскольку случай $x_1 = x_2$ не исключён). Далее, поскольку коэффициент перед x^2 положителен, функция $y = f(x)$ принимает положительные значения на множестве $(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$; но по условию имеем $1 < x_1$ и $3 > x_2$, поэтому $f(1) > 0$ и $f(3) > 0$. Наконец, четвёртое неравенство системы (7) следует из цепочки неравенств $1 < x_1 \leqslant x_0 \leqslant x_2 < 3$.

Теперь покажем достаточность. Пусть система (7) выполнена. Неравенство $D \geqslant 0$ обеспечивает наличие корней x_1 и x_2. Второе и третье неравенства говорят о том, что точки 1 и 3 принадлежат множеству решений неравенства $f(x) > 0$, то есть объединению лучей $(-\infty; x_1)$ и $(x_2; +\infty)$. В силу четвёртого неравенства эти точки принадлежат разным лучам: $1 < x_1$ и $3 > x_2$, что и требуется.

Остаётся решить систему (7). Имеем:

$$\begin{cases} a^2 - 16 \geqslant 0, \\ a + 5 > 0, \\ 3a + 13 > 0, \\ 1 < -\dfrac{a}{2} < 3. \end{cases}$$

Доводим дело до конца и записываем ответ.

Ответ: $a \in \left(-\frac{13}{3}; -4\right]$.

Задача 7. При каких a корни уравнения $ax^2 + (4 - 2a)x + 1 = 0$ по модулю меньше 1?

Решение. При $a = 0$ получается уравнение $4x + 1 = 0$. Его корень $-1/4$ по модулю меньше 1, поэтому $a = 0$ годится.

Пусть $a \neq 0$. Изобразим нужные ситуации в зависимости от знака a (рис. 7).

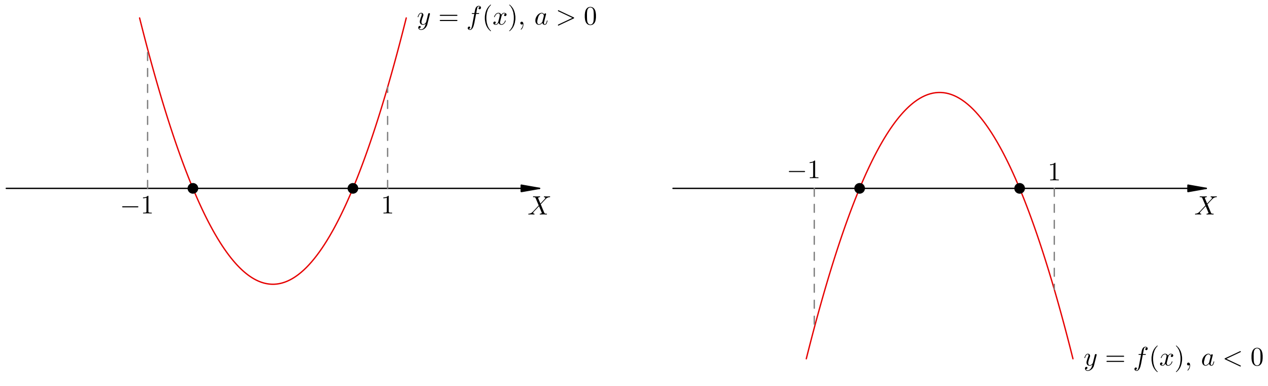

Рис. 7. К задаче 7

Рассуждая, как и выше, заключаем, что корни нашего уравнения лежат между -1 и 1 тогда и только тогда, когда выполнена совокупность двух систем условий:

$$\begin{cases} a > 0, \\ D \geqslant 0, \\ f(-1) > 0, \\ f(1) > 0, \\ -1 < x_0 < 1, \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} a < 0, \\ D \geqslant 0, \\ f(-1) < 0, \\ f(1) < 0, \\ -1 < x_0 < 1. \end{cases}$$

Эта совокупность эквивалентна одной системе:

$$\begin{cases} D \geqslant 0, \\ a \cdot f(-1) > 0, \\ a \cdot f(1) > 0, \\ -1 < x_0 < 1. \end{cases}$$

Имеем:

$$\begin{cases} a^2 - 5a + 4 \geqslant 0, \\ a(3a-3) > 0, \\ a(5-a) > 0, \\ -1 < \dfrac{a-2}{a} < 1. \end{cases}$$

Решением данной системы служит множество $4 \leqslant a < 5$. Сюда надо добавить ещё $a = 0$, рассмотренное с самого начала.

Ответ: $a \in \{0\} \cup [4; 5)$.

Фактически нами установлено следующее утверждение.

Утверждение 3. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Для того, чтобы корни данного квадратного трёхчлена принадлежали интервалу $(s; t)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялась следующая система условий:

$$\begin{cases} D \geqslant 0, \\ a \cdot f(s) > 0, \\ a \cdot f(t) > 0, \\ s < x_0 < t. \end{cases}$$

Задача 8. При каких a неравенство $x^2 + ax + 1 < 0$ выполнено для любого $x \in [1; 2]$?

Решение. Пусть $f(x) = x^2 + ax + 1$. Изобразим нашу ситуацию графически (рис. 8).

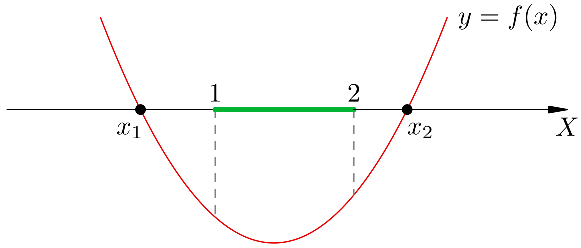

Рис. 8. К задаче 8

Из рисунка легко понять, что наше неравенство $f(x) < 0$ справеливо для любого $x \in [1; 2]$ в том и только в том случае, если выполнена следующая система условий:

$$\begin{cases} f(1) < 0, \\ f(2) < 0. \end{cases} \tag{8}$$

Необходимость очевидна: если неравенство $f(x) < 0$ выполняется для всех x из отрезка $[1; 2]$, то, в частности, верно $f(1) < 0$ и $f(2) < 0$.

Покажем достаточность. Пусть выполнены оба неравенства (8). Выполнение хотя бы одного из этих неравенств гарантирует существование двух различных корней x_1 и x_2 квадратного трёхчлена $f(x)$; при этом, поскольку коэффициент при x^2 положителен, множеством решений неравенства $f(x) < 0$ служит интервал $(x_1; x_2)$. В силу неравенств (8) обе точки 1 и 2 лежат внутри интервала $(x_1; x_2)$. Но тогда и весь отрезок $[1; 2]$ расположен внутри этого интервала; следовательно, для любого $x \in [1; 2]$ выполнено неравенство $f(x) < 0$, что нам и нужно.

Остаётся решить систему (8). Имеем:

$$\begin{cases} a + 2 < 0, \\ 2a + 5 < 0, \end{cases}$$

откуда $a < -\frac{5}{2}$.

Ответ: $a < -\frac{5}{2}$.

Точно так же можно рассмотреть ситуацию, в которой коэффициент при x^2 отрицателен, и прийти к следующему утверждению.

Утверждение 4. Пусть $f(x) = ax^2+bx+c$, $a \neq 0$. Для того, чтобы отрезок $[s;t]$ был расположен между корнями данного квадратного трёхчлена, необходимо и достаточно, чтобы выполнялась следующая система условий:

$$\begin{cases} a \cdot f(s) < 0, \\ a \cdot f(t) < 0. \end{cases}$$

Утверждений, подобных утверждениям 1–4, можно составить очень много. Ведь ситуации в задачах возникают самые разнообразные: неравенства могут быть строгими и нестрогими, промежутки — замкнутыми или открытыми (с одного или двух концов). Требования на расположение корней тоже могут быть разными. В общем, ценность общей теории здесь невелика, и мы не рекомендуем пользоваться утверждениями 1–4 и им подобными как готовыми рецептами.

Будет гораздо лучше, если при решении каждой конкретной задачи вы сделаете рисунок, запишете нужные условия и докажете их необходимость и достаточность. Именно к этому следует стремиться. Ведь при наличии такого многообразия ситуаций приходится рассчитывать лишь на собственное *общее понимание*, которое вырабатывается в результате самостоятельного решения большого количества задач.

Вот пример задачи, где готовые рецепты могут не сработать — требуется понимание общих принципов и безупречная логика рассуждений.

Задача 9. При каких a существует единственный корень уравнения $x^2 - ax + 2 = 0$, удовлетворяющий условию $1 < x < 3$?

Решение. Логически возможны три ситуации, которые нас устраивают.

1. Уравнение имеет два корня, один из которых принадлежит интервалу $(1;3)$, а другой лежит вне отрезка $[1;3]$.
2. Уравнение имеет два корня, один из которых принадлежит интервалу $(1;3)$, а другой равен 1 или 3.
3. Уравнение имеет единственный корень, который принадлежит интервалу $(1;3)$.

Начнём с первой ситуации. Она изображена на рис. 9: функция $f(x) = x^2 - ax + 2$ на концах интервала $(1;3)$ принимает значения разных знаков.

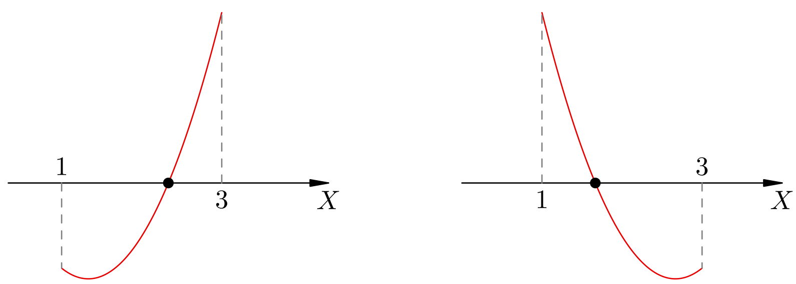

Рис. 9. К задаче 9

Данная ситуация характеризуется очень просто. *Для того, чтобы один из корней уравнения $f(x) = 0$ принадлежал интервалу $(1;3)$, а другой лежал вне отрезка $[1;3]$, необходимо и* *достаточно, чтобы выполнялось неравенство*

$$f(1) \cdot f(3) < 0. \tag{9}$$

Действительно, пусть уравнение $f(x) = 0$ имеет два корня x_1 и x_2, причём $x_1 \in (1;3)$ и $x_2 \notin [1;3]$. Функция $f(x)$ меняет знак только в точках x_1 и x_2. При этом на отрезке $[1;3]$ находится лишь точка x_1, лежащая внутри этого отрезка. Значит, на концах данного отрезка функция $f(x)$ принимает значения разных знаков, то есть $f(1) \cdot f(3) < 0$. Необходимость доказана.

Наоборот, пусть выполнено неравенство $f(1) \cdot f(3) < 0$. Тогда одно из значений $f(1)$ или $f(3)$ отрицательно, что обеспечивает существование двух корней квадратного трёхчлена $f(x)$. При этом ровно один из них лежит на интервале $(1;3)$ — в противном случае значения $f(1)$ и $f(3)$ были бы одного знака. Второй корень не может совпадать с 1 или 3 (иначе $f(1) \cdot f(3) = 0$) и потому лежит вне отрезка $[1;3]$. Достаточность доказана.

Решаем неравенство (9):

$$(3 - a)(11 - 3a) < 0,$$

откуда

$$3 < a < \frac{11}{3}\,. \tag{10}$$

Теперь рассмотрим вторую ситуацию: уравнение имеет два корня, один из которых принадлежит интервалу $(1;3)$, а другой равен 1 или 3. Проще всего исследовать её так: полагаем в уравнении $x = 1$ или $x = 3$, находим a и смотрим, каков второй корень.

Подставляя в уравнение $x = 1$, получим $1 - a + 2 = 0$, то есть $a = 3$. При этом a уравнение принимает вид

$$x^2 - 3x + 2 = 0;$$

второй корень (помимо 1) полученного уравнения равен 2 и принадлежит интервалу $(1;3)$. Значит, $a = 3$ годится.

Аналогично, подставляя в исходное уравнение $x = 3$, получим $a = \frac{11}{3}$ и уравнение

$$x^2 - \frac{11}{3}a + 2 = 0,$$

второй корень которого (помимо 3) равен $\frac{2}{3}$. Этот корень не принадлежит интервалу $(1;3)$, и потому $a = \frac{11}{3}$ не годится.

Наконец, переходим к третьей ситуации, когда уравнение имеет единственный корень. Так будет в случае равенства нулю дискриминанта:

$$D = a^2 - 8 = 0,$$

откуда $a = \pm 2\sqrt{2}$. Если $a = 2\sqrt{2}$, то $x = \sqrt{2} \in (1;3)$, поэтому $a = 2\sqrt{2}$ годится. Если же $a = -2\sqrt{2}$, то $x = -\sqrt{2} \notin (1;3)$, и поэтому $a = -2\sqrt{2}$ не годится.

Таким образом, искомым множеством значений a служит множество (10) с добавленными значениями $a = 3$ и $a = 2\sqrt{2}$.

Ответ: $a \in \{2\sqrt{2}\} \cup \left[3; \frac{11}{3}\right)$.