Квадратные уравнения и неравенства с параметрами. 1

Мы приступаем к изучению уравнений вида

$$ax^2 + bx + c = 0. \tag{1}$$

Если $a \neq 0$, то уравнение (1) является *квадратным*. Не забываем, однако, что параметр a «никому ничем не обязан» и может равняться нулю (и тогда уравнение перестаёт быть квадратным). Случай $a = 0$ при необходимости следует рассматривать отдельно.

Напомним известные вам факты теории. Пусть уравнение (1) является квадратным, то есть $a \neq 0$. Тогда *дискриминант* этого уравнения есть величина $D = b^2 - 4ac$. Возможны три случая.

1. Если $D > 0$, то уравнение (1) имеет ровно два различных корня:
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}\,.$$
2. Если $D = 0$, то уравнение (1) имеет единственный корень
$$x = -\frac{b}{2a}\,.$$
3. Если $D < 0$, то уравнение (1) не имеет корней.

Для квадратного уравнения вида

$$ax^2 + 2kx + b = 0$$

удобно использовать дискриминант

$$D_1 = \frac{D}{4} = k^2 - ac.$$

Тогда формула корней выглядит так:

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}\,.$$

Если уравнение (1) имеет два различных корня x_1 и x_2, то его левая часть раскладывается на множители следующим образом:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Если уравнение (1) имеет единственный корень x_0, то его левая часть является полным квадратом:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2.$$

Теорема Виета. Если квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два различных корня x_1 и x_2, то справедливы формулы:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}\,, \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}\,. \end{cases}$$

Эти же формулы имеют место и в случае единственного корня x_1, если положить $x_2 = x_1$.

Задача 1. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$(a-2)x^2 + 2ax + a + 3 = 0$$

имеет единственный корень.

Решение. Если $a = 2$, то уравнение превращается в линейное: $4x + 5 = 0$, которое имеет единственный корень. Поэтому $a = 2$ годится.

Если $a \neq 2$, то уравнение является квадратным с дискриминантом

$$D_1 = a^2 - (a-2)(a+3) = 6 - a.$$

Уравнение будет иметь единственный корень в случае $D_1 = 0$, то есть $a = 6$.

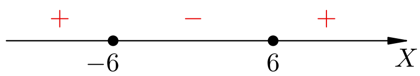
Ответ: $a = 2$ или $a = 6$.

Задача 2. При всех a решить уравнение $x^2 + ax + 9 = 0$.

Решение. Находим дискриминант:

$$D = a^2 - 36 = (a-6)(a+6).$$

Методом интервалов определяем знаки дискриминанта:



Соответственно, рассматриваем следующие случаи. Если $a < -6$ или $a > 6$, то уравнение имеет два корня:

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 36}}{2}. \tag{2}$$

Если $a = -6$, то корень один, и он легко получается из формулы (2): $x = 3$. Аналогично, если $a = 6$, то $x = -3$. Наконец, если $-6 < a < 6$, то уравнение не имеет решений.

Ответ: Если $a \in (-\infty; -6) \cup (6; +\infty)$, то $x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2-36}}{2}$; если $a = -6$, то $x = 3$; если $a = 6$, то $x = -3$; если $a \in (-6; 6)$, то решений нет.

Можно дать ответ в более сжатом виде, если «пристыковать» случаи $a = \pm 6$ к первому случаю.

Ответ: Если $a \in (-\infty; -6] \cup [6; +\infty)$, то $x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2-36}}{2}$; если $a \in (-6; 6)$, то решений нет.

В каком именно виде записывать ответ — дело вашего вкуса. Мы обычно будем предпочитать второй вариант.

Задача 3. При всех a решить уравнение $ax^2 + x + 1 = 0$.

Решение. Здесь тоже хочется сразу написать дискриминант, но давайте всё же заметим, что возможно $a = 0$, и тогда уравнение не будет квадратным (так что ни о каком дискриминанте говорить не придётся). Этот случай надо рассмотреть отдельно.

Пусть $a = 0$. Тогда уравнение примет вид $x + 1 = 0$, откуда $x = -1$.

Пусть теперь $a \neq 0$. Тогда уравнение является квадратным, и его дискриминант $D = 1 - 4a$. При $a \leqslant \frac{1}{4}$ дискриминант неотрицателен, поэтому

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4a}}{2a}.$$

Если же $a > \frac{1}{4}$, то $D < 0$ и уравнение не имеет корней.

Ответ: Если $a \in (-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{1}{4}\right]$, то $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4a}}{2a}$; если $a = 0$, то $x = -1$; если $a \in \left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$, то решений нет.

Задача 4. Найдите все значения a, при каждом из которых один из корней уравнения

$$x^2 - (2a+1)x + a^2 + 2 = 0$$

в два раза больше другого.

Решение. Прежде всего, уравнение должно иметь два различных корня, поэтому его дискриминант положителен:

$$D = (2a+1)^2 - 4(a^2+2) = 4a - 7 > 0,$$

откуда

$$a > \frac{7}{4}\,. \tag{3}$$

Пусть корни нашего уравнения равны t и $2t$. По теореме Виета имеем:

$$\begin{cases} t + 2t = 2a + 1, \\ t \cdot 2t = a^2 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t = 2a + 1, \\ 2t^2 = a^2 + 2. \end{cases}$$

Выразим t из первого уравнения, подставим во второе и после простых преобразований получим:

$$a^2 - 8a + 16 = 0 \;\Leftrightarrow\; (a-4)^2 = 0,$$

то есть $a = 4$. Это значение a удовлетворяет неравенству (3) и потому годится.

Ответ: $a = 4$.

Задача 5. При каких значениях a сумма квадратов двух различных корней уравнения

$$x^2 - 4ax + 5a = 0$$

равна 6?

Решение. Уравнение имеет два различных корня, поэтому дискриминант положителен:

$$D_1 = (2a)^2 - 5a = a(4a-5) > 0,$$

откуда

$$a < 0 \quad \text{или} \quad a > \frac{5}{4}\,. \tag{4}$$

Пусть корни равны x_1 и x_2. Имеем:

$$6 = x_1^2 + x_2^2 = \left(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2\right) - 2x_1x_2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = (4a)^2 - 2 \cdot 5a = 16a^2 - 10a.$$

Получаем квадратное уравнение

$$8a^2 - 5a - 3 = 0,$$

корни которого $a_1 = 1$ и $a_2 = -\frac{3}{8}$. Значение a_1 не годится, так как не удовлетворяет условию (4). Значение a_2 удовлетворяет этому условию и поэтому подходит.

Ответ: $a = -\frac{3}{8}$.

Задача 6. При каких значениях a уравнение $(a-3)x^2 - 2ax + 5a = 0$ имеет только положительные корни?

Решение. При $a = 3$ получаем уравнение $-6a + 15 = 0$, корень которого положителен. Поэтому значение $a = 3$ годится.

Пусть теперь $a \neq 3$. Уравнение является квадратным с дискриминантом

$$D_1 = a^2 - 5a(a-3) = a(15-4a).$$

Условие существования корней:

$$a(15-4a) \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; 0 \leqslant a \leqslant \frac{15}{4}\,. \tag{5}$$

Сами корни можно не искать — на помощь снова приходит теорема Виета. В самом деле, ясно, что необходимым и достаточным условием положительности корней x_1, x_2 квадратного уравнения служит система неравенств:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 > 0, \\ x_1 x_2 > 0. \end{cases} \tag{6}$$

(Необходимость очевидна: если корни x_1, x_2 положительны, то оба неравенства (6) выполнены. Теперь покажем достаточность. Пусть оба неравенства (6) выполняются. В силу второго неравенства оба корня имеют одинаковый знак. Тогда в силу первого неравенства оба корня положительны.)

В нашем случае система (6) даёт:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{a-3} > 0, \\ \dfrac{5a}{a-3} > 0, \end{cases}$$

откуда легко находим

$$a < 0 \quad \text{или} \quad a > 3. \tag{7}$$

Нам остаётся пересечь множества (7) и (5) и к полученному пересечению добавить найденное ранее значение $a = 3$.

Ответ: $\left[3; \frac{15}{4}\right]$.

Задача 7. При каких a уравнения $x^2 + ax + 1 = 0$ и $x^2 + x + a = 0$ имеют общий корень?

Решение. Предположим, что x_0 — общий корень данных уравнений. Имеем систему:

$$\begin{cases} x_0^2 + ax_0 + 1 = 0, \\ x_0^2 + x_0 + a = 0. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим:

$$(a-1)(x_0-1) = 0.$$

Отсюда следует, что $a = 1$ или $x_0 = 1$. Надо рассмотреть оба этих случая.

Если $a = 1$, то оба уравнения совпадают: $x^2 + x + 1 = 0$. Это уравнение не имеет корней, поэтому $a = 1$ не годится.

Если $x_0 = 1$, то из любого равенства системы получаем $a = -2$. При данном a исходные уравнения принимают вид:

$$x^2 - 2x + 1 = 0, \quad x^2 + x - 2 = 0.$$

Проверкой убеждаемся, что $x = 1$ в самом деле является общим корнем данных уравнений.

Ответ: $a = -2$.

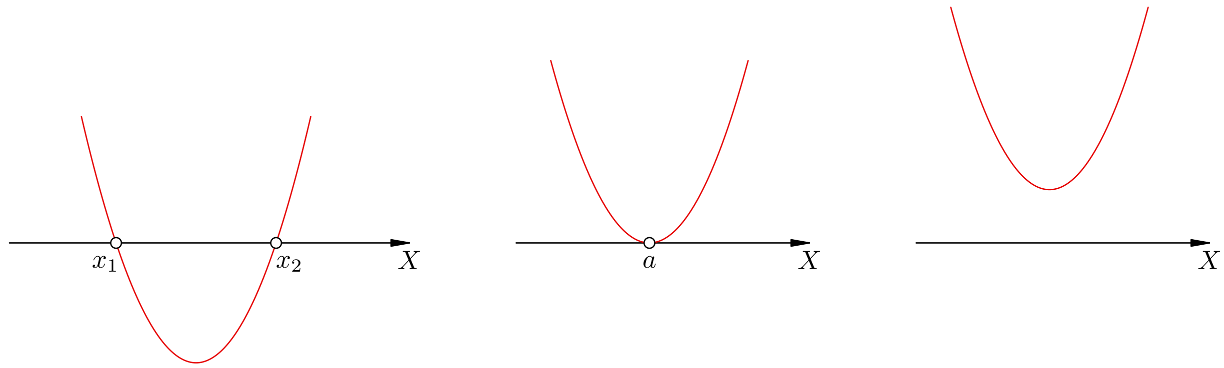
Переходим к рассмотрению квадратных неравенств с параметрами. Здесь мы затронем лишь начало данной темы; другие вопросы будут изложены в следующей статье.

Задача 8. При всех a решить неравенство $x^2 - 2ax + 4 > 0$.

Решение. Находим дискриминант квадратного трёхчлена $x^2 - 2ax + 4$:

$$D_1 = a^2 - 4.$$

Возможны три варианта расположения параболы $y = x^2 - 2ax + 4$, изображённые на рисунке (слева направо идут случаи $D_1 > 0$, $D_1 = 0$ и $D_1 < 0$).



Пусть $D_1 > 0$, то есть $a < -2$ или $a > 2$. Тогда парабола пересекает ось X в двух точках:

$$x_1 = a - \sqrt{a^2 - 4}, \quad x_2 = a + \sqrt{a^2 - 4}\,.$$

Множество решений неравенства состоит из тех x, при которых $y > 0$ (ведь именно таков знак решаемого неравенства); то есть из тех x, при которых график проходит выше оси абсцисс:

$$x < a - \sqrt{a^2 - 4}, \quad x > a + \sqrt{a^2 - 4}\,.$$

Пусть теперь $D_1 = 0$, то есть $a = \pm 2$. Парабола касается оси X в точке $x = a$; множество решений нашего неравенства — все x за исключением точки a.

Наконец, пусть $D_1 < 0$, то есть $-2 < a < 2$. Тогда парабола лежит целиком выше оси X, и любой x служит решением нашего неравенства.

Ответ: Если $a \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$, то $x \in \left(-\infty; a - \sqrt{a^2 - 4}\right) \cup \left(a + \sqrt{a^2 - 4}; +\infty\right)$; если $a \in (-2; 2)$, то x любое.

Задача 9. Найти все такие a, что решения неравенства $x^2 + (a-5)x - 2a^2 + 2a + 4 \leqslant 0$ образуют отрезок, длина которого больше 6.

Решение. Находим дискриминант квадратного трёхчлена $x^2 + (a-5)x - 2a^2 + 2a + 4$:

$$D = (a-5)^2 - 4(-2a^2 + 2a + 4) = 9a^2 - 18a + 9 = 9(a-1)^2.$$

Тогда корни этого трёхчлена:

$$x_{1,2} = \frac{-(a-5) \pm 3(a-1)}{2}\,,$$

то есть

$$x_1 = \frac{-a + 5 + 3a - 3}{2} = a + 1, \quad x_2 = \frac{-a + 5 - 3a + 3}{2} = 4 - 2a.$$

В зависимости от того, какой из корней больше, множеством решений данного неравенства является либо отрезок $[a+1; 4-2a]$, либо отрезок $[4-2a; a+1]$ (либо точка в случае совпадения корней). Но нам нет нужды заниматься этим (пусть и несложным) исследованием. Ведь длина отрезка решений в любом случае равна:

$$|x_1 - x_2| = |(a+1) - (4-2a)| = |3a - 3|.$$

В соответствии с условием получаем неравенство:

$$|3a - 3| > 6,$$

то есть

$$|a - 1| > 2,$$

откуда $a < -1$ или $a > 3$.

Ответ: $a \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.

Замечание. Задачу можно было решить и без явного нахождения корней — а именно, с помощью теоремы Виета. В самом деле, неравенство

$$|x_1 - x_2| > 6$$

эквивалентно неравенству

$$36 < (x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2;$$

а как действовать дальше, вам уже известно.

Мы хотели бы отметить лишь, что если дискриминант оказывается полным квадратом, то для корней квадратного трёхчлена получаются выражения, не содержащие радикалов, и это обстоятельство часто упрощает решение задачи. Однако такой «подарок судьбы» попадается далеко не всегда. В следующей статье будут рассмотрены задачи, в которых использование явных выражений для корней приводит к техническим трудностям и решение отыскивается иными методами.