Необходимые условия в задачах с параметрами

В некоторых задачах определённые требования должны выполняться *при любых* значениях переменной или параметра. В таких ситуациях может пригодиться следующая идея: рассмотреть *конкретные* удобные значения этой величины, получив тем самым *необходимые* условия, а затем выяснить, какие из полученных условий являются ещё и *достаточными*.

Задача 1. (*МГУ, ф-т психологии, 1978*) Найти множество всех пар чисел (a, b), для каждой из которых равенство

$$a(\cos x - 1) + b^2 = \cos(ax + b^2) - 1 \tag{1}$$

справедливо при любых значениях x.

Решение. Коль скоро x должен быть любым, равенство (1) обязано выполняться, в частности, для $x = 0$. Подставляя $x = 0$ в (1), получим:

$$b^2 = \cos b^2 - 1.$$

Отсюда неизбежно $b = 0$ (поскольку $b^2 \geqslant 0$, $\cos b^2 - 1 \leqslant 0$, и равенство возможно только в том случае, если обе части обращаются в нуль одновременно). Подставляем $b = 0$ в (1):

$$a(\cos x - 1) = \cos ax - 1. \tag{2}$$

Равенство (2) должно выполняться для любого x, поэтому подставим $x = 2\pi$:

$$0 = \cos 2\pi a - 1,$$

откуда $2\pi a = 2\pi n$ и $a = n$ $(n \in \mathbb{Z})$. Равенство (2) примет вид:

$$n(\cos x - 1) = \cos nx - 1. \tag{3}$$

Подставим сюда $x = \frac{\pi}{2}$:

$$-n = \cos\frac{n\pi}{2} - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos\frac{n\pi}{2} = 1 - n.$$

Отсюда $n = 0, 1, 2$. Таким образом, мы с необходимостью получаем следующие пары (a, b): $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(2, 0)$. Иных пар быть не может (то есть получены необходимые условия); остаётся проверить, какие из них действительно годятся (то есть какие из необходимых условий являются к тому же достаточными).

Проверим пару $(0, 0)$. Подставляя $a = 0$, $b = 0$ в равенство (1), получим $0 = 0$. Значит, пара $(0, 0)$ нам подходит.

Проверим пару $(1, 0)$. Подставляя $a = 1$, $b = 0$ в (1), получим $\cos x - 1 = \cos x - 1$. Это равенство выполнено для любого x, поэтому пара $(1, 0)$ также подходит.

Проверим пару $(2, 0)$. Подставляя $a = 2$, $b = 0$ в (1), получим $2(\cos x - 1) = \cos 2x - 1$. Это равенство не выполняется, например, для $x = \frac{\pi}{3}$, поэтому пара $(2, 0)$ не годится.

Ответ: $(0, 0)$, $(1, 0)$.

Замечание. Можно было бы немного сократить решение, если вместо $x = \frac{\pi}{2}$ подставить $x = \pi$ (тогда пара $(2, 0)$ не возникнет — убедитесь в этом самостоятельно). Наше решение, однако, преследовало чисто методическую цель: показать, что *возникающие в подобных ситуациях необходимые условия вовсе не обязаны быть достаточными*, поэтому последующая проверка обязательна!

Задача 2. Найти все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} 2^{bx} + (a+1)by^2 = a^2, \\ (a-1)x^3 + y^3 = 1 \end{cases}$$

имеет решение для любого b.

Решение. Система должна иметь решение, в частности, при $b = 0$. Подставляя $b = 0$ в первое уравнение системы, получим $a^2 = 1$, то есть $a = \pm 1$. Это необходимые условия на параметр a (иные значения a заведомо не годятся); остаётся проверить, являются ли эти условия достаточными.

Пусть $a = 1$. Тогда система принимает вид:

$$\begin{cases} 2^{bx} + 2by^2 = 1, \\ y^3 = 1, \end{cases}$$

и надо проверить, имеет ли она решения для любого b. Из второго уравнения имеем $y = 1$; после подстановки этого значения в первое уравнение получим

$$2^{bx} = 1 - 2b.$$

Это уравнение не имеет решений, например, при $b = 1$. Следовательно, $a = 1$ не годится.

Пусть теперь $a = -1$. С этим a система примет вид:

$$\begin{cases} 2^{bx} = 1, \\ -2x^3 + y^3 = 1. \end{cases}$$

Легко видеть, что пара $(0, 1)$ будет решением этой системы при любом b. Значит, $a = -1$ нам подходит.

Ответ: $a = -1$.