Параметры. Монотонность

В данном листке собраны задачи, в которых ключевую роль играет свойство монотонности той или иной функции.

Задача 1. (*«Ломоносов», 2005*) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\big||x-a|+2x\big|+4x=8|x+1|$$

не имеет ни одного корня.

Решение. Запишем уравнение в виде $f(x)=0$, где

$$f(x)=\big||x-a|+2x\big|+4x-8|x+1|.$$

Функция f является кусочно-линейной: на каком бы промежутке мы ни снимали модули, наша функция будет иметь вид $f(x)=kx+b$.

Если $x\in E_1=(-\infty;-1]$, то наименьшее возможное значение k равно $-1-2+4+8=9$; следовательно, $k>0$ при любом $x\in E_1$, и функция f монотонно возрастает на множестве E_1. Если же $x\in E_2=(-1;+\infty)$, то наибольшее возможное значение k равно $1+2+4-8=-1$; значит, $k<0$ при всех $x\in E_2$, и функция f монотонно убывает на множестве E_2.

Таким образом, функция f достигает в точке $x=-1$ своего наибольшего значения на $\mathbb{R}$; множество значений функции f есть луч $(-\infty;c]$, где

$$c=f(-1)=\big||a+1|-2\big|-4.$$

Уравнение $f(x)=0$ не имеет решений тогда и только тогда, когда $c<0$, то есть

$$\big||a+1|-2\big|-4<0 \quad\Leftrightarrow\quad \big||a+1|-2\big|<4 \quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\quad -4<|a+1|-2<4 \quad\Leftrightarrow\quad -2<|a+1|<6 \quad\Leftrightarrow\quad -7<a<5.$$

Ответ: $(-7;5)$.

Задачи

1. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017*) Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство

$$a\log_3 x+\log_{\frac{1}{2}} x>1$$

имеет решения, причём среди решений нет бóльших 1.

$\boxed{(-\infty;\log_2 3)}$

2. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016*) Укажите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2+2y^2+2y(x-a)+a^2=0,\\ 2^{-2-y}\cdot\log_2 x<1 \end{cases}$$

имеет решения, и найдите эти решения.

$\boxed{-2<a<0;\ x=-a,\ y=a}$

3. (*ОММО, 2017*) При каких значениях параметра a уравнение

$$4^{|x-a|}\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-2x+4\right)+2^{x^2-2x}\log_{\sqrt{3}}\left(2|x-a|+3\right)=0$$

имеет ровно три решения?

$\boxed{\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2}}$

4. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015*) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$25^{-|x-a|}\log_{\sqrt[5]{7}}(x^2-2x+3)+5^{-x^2+2x}\log_{\frac{1}{7}}(2|x-a|+2)=0$$

имеет ровно три различных решения.

$\boxed{\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2}}$

5. (*«Ломоносов», 2014)* Найдите все пары (a,b), при которых множество решений неравенства

$$\log_{2014}(x-a)>2x^2-x-b$$

совпадает с промежутком $(0;1)$.

$\boxed{a=-\frac{1}{2013},\ b=\log_{2014}2013}$

6. (*«Ломоносов», 2013*) Функция $f(t)$ с областью определения $D(f)=[1;+\infty)$ удовлетворяет уравнению

$$f\left(\frac{4^y+4^{-y}}{2}\right)=y$$

для любого $y\geqslant 0$. Для каждого значения $a\neq 0$ найти все решения неравенства $f\left(\frac{a}{x+2a}\right)\leqslant 1$.

$\boxed{\text{Если } a>0, \text{ то } x\in\left[-\frac{26a}{17};-a\right]; \text{ если } a<0, \text{ то } x\in\left[-a;-\frac{26a}{17}\right]}$

7. (*«Ломоносов», 2005*) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\big||x-a|+2x\big|+4x=8|x+1|$$

не имеет ни одного корня.

$\boxed{(-7;5)}$