

## Минимаксные задачи с параметрами

Данная статья служит продолжением статьи «[Минимаксные задачи. 1](#)», в которой были изложены основные идеи. Здесь мы разберём несколько задач и посмотрим, как минимаксные методы работают в задачах с параметрами.

**Задача 1.** (МГУ, геологич. ф-т, 1990) Найти все пары действительных чисел  $a$  и  $b$ , при которых уравнение

$$(3x - a^2 + ab - b^2)^2 + (2x^2 - a^2 - ab)^2 + x^2 + 9 = 6x$$

имеет хотя бы одно решение  $x$ .

*Решение.* Перепишем уравнение в виде:

$$(3x - a^2 + ab - b^2)^2 + (2x^2 - a^2 - ab)^2 + (x - 3)^2 = 0.$$

Сумма квадратов, будучи неотрицательной, равна нулю тогда и только тогда, когда каждое слагаемое обращается в нуль. Таким образом, наше уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 3x - a^2 + ab - b^2 = 0, \\ 2x^2 - a^2 - ab = 0, \\ x - 3 = 0. \end{cases}$$

Из третьего уравнения имеем  $x = 3$ ; подставляя это значение в первое и второе уравнения, получим систему

$$\begin{cases} a^2 - ab + b^2 = 9, \\ a^2 + ab = 18. \end{cases} \quad (1)$$

Умножим первое уравнение системы (1) на  $-2$  и сложим со вторым уравнением. Придём к уравнению

$$a^2 - 3ab + 2b^2 = 0,$$

то есть

$$(a - b)(a - 2b) = 0.$$

Отсюда  $a = b$  или  $a = 2b$ . Подставляя это в любое из уравнений системы (1) (проще во второе), найдём в итоге искомые пары  $(a, b)$ .

*Ответ:*  $(3, 3)$ ,  $(-3, -3)$ ,  $(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$ ,  $(-2\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ .

**Задача 2.** (МГУ, ф-т почвоведения, 1983) Найти все значения  $\alpha$ , которые удовлетворяют условию  $5 < \alpha < 16$  и при которых уравнение

$$1 + \cos^2 \left( \frac{\alpha x}{2} + \frac{3\pi}{8} \right) = \left( \frac{1}{3} \right)^{|\cos \pi x - \sin \pi x|}$$

относительно  $x$  имеет хотя бы одно решение, удовлетворяющее условию  $1 \leq x \leq 2$ .

*Решение.* Поскольку выполнены неравенства

$$1 + \cos^2 \left( \frac{\alpha x}{2} + \frac{3\pi}{8} \right) \geq 1, \quad \left( \frac{1}{3} \right)^{|\cos \pi x - \sin \pi x|} \leq 1,$$

наше уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 1 + \cos^2 \left( \frac{\alpha x}{2} + \frac{3\pi}{8} \right) = 1, \\ \left( \frac{1}{3} \right)^{|\cos \pi x - \sin \pi x|} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\alpha x}{2} + \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ \cos \pi x - \sin \pi x = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения легко находим:  $\pi x = \frac{\pi}{4} + \pi k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ), то есть  $x = \frac{1}{4} + k$ . По условию должно быть выполнено двойное неравенство  $1 \leq x \leq 2$ ; следовательно, подходит единственное значение  $k = 1$ , при котором  $x = \frac{5}{4}$ .

Подставляя  $x = \frac{5}{4}$  в первое уравнение системы, получим

$$\alpha = \frac{\pi(1 + 8n)}{5}.$$

По условию должно быть  $5 < \alpha < 16$ ; значит, годятся значения  $n = 1, 2, 3$ . В самом деле:

$$\begin{aligned} n \leq 0 &\Rightarrow \alpha \leq \frac{\pi}{5} < 1 < 5; \\ n = 1 &\Rightarrow \alpha = \frac{9\pi}{5} > \frac{9 \cdot 3}{5} > 5; \\ n = 3 &\Rightarrow \alpha = 5\pi < 5 \cdot 3,2 = 16; \\ n \geq 4 &\Rightarrow \alpha \geq \frac{33\pi}{5} > \frac{33 \cdot 3}{5} > 16. \end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{9\pi}{5}$ ,  $\frac{17\pi}{5}$ ,  $5\pi$ .

**Задача 3.** (МГУ, ф-т психологии, 1988) Найдите наибольшее значение параметра  $a$ , при котором неравенство

$$a\sqrt{a}(x^2 - 2x + 1) + \frac{\sqrt{a}}{x^2 - 2x + 1} \leq \sqrt[4]{a^3} \cdot \left| \sin \frac{\pi x}{2} \right|$$

имеет хотя бы одно решение.

*Решение.* Для удобства сделаем замену  $b = \sqrt[4]{a}$ . Тогда неравенство примет вид

$$b^6(x-1)^2 + \frac{b^2}{(x-1)^2} \leq b^3 \left| \sin \frac{\pi x}{2} \right|. \quad (2)$$

Если  $b = 0$ , то любое значение  $x \neq 1$  является решением неравенства (2), поэтому  $b = 0$  годится. Теперь надо выяснить, существуют ли  $b > 0$ , при которых неравенство (2) имеет решения. В предположении  $b > 0$  делим обе части неравенства (2) на  $b^3$ :

$$b^3(x-1)^2 + \frac{1}{b(x-1)^2} \leq \left| \sin \frac{\pi x}{2} \right|. \quad (3)$$

В силу неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим имеем оценку снизу для левой части неравенства (3):

$$b^3(x-1)^2 + \frac{1}{b(x-1)^2} \geq 2 \cdot \sqrt{b^3(x-1)^2 \cdot \frac{1}{b(x-1)^2}} = 2b.$$

Вместе с тем для правой части неравенства (3) имеем очевидную оценку сверху:  $\left| \sin \frac{\pi x}{2} \right| \leq 1$ . Поэтому если  $2b > 1$ , то неравенство (3) не имеет решений; значит, неравенство (3) может иметь решения лишь при условии  $2b \leq 1$ , то есть при  $b \leq \frac{1}{2}$ .

Покажем, что при  $b = \frac{1}{2}$  неравенство (3) имеет решения. С этим  $b$  оно примет вид

$$\frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{2}{(x-1)^2} \leq \left| \sin \frac{\pi x}{2} \right|. \quad (4)$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что при  $x = 3$  неравенство (4) выполнено<sup>1</sup>. Итак, наибольшее значение  $b$  равно  $\frac{1}{2}$ , и потому искомое наибольшее значение  $a$  равно  $\frac{1}{16}$ .

Ответ:  $\frac{1}{16}$ .

**Задача 4.** (МГУ, филологич. ф-т, 1985) Для каждого значения  $a$  решить уравнение

$$4 \cos x \sin a + 2 \sin x \cos a - 3 \cos a = 2\sqrt{7}.$$

*Решение.* Здесь работает идея, которая обсуждалась в листке «[Параметр как переменная](#)». Мы меняем ролями величины  $x$  и  $a$ , воспринимая наше уравнение как уравнение относительно переменной  $a$  с параметром  $x$ .

Переписываем уравнение в следующем виде:

$$A \sin a + B \cos a = 2\sqrt{7}, \quad (5)$$

где

$$A = 4 \cos x, \quad B = 2 \sin x - 3.$$

Замечая, что  $B \neq 0$  при любом  $x$ , преобразуем<sup>2</sup> уравнение (5):

$$\sqrt{A^2 + B^2} \left( \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin a + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos a \right) = 2\sqrt{7}.$$

Поскольку

$$\left( \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right)^2 + \left( \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right)^2 = 1,$$

существует угол  $\varphi$  такой, что

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \cos \varphi, \quad \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \sin \varphi.$$

Тем самым уравнение (5) приобретает вид:

$$\sqrt{A^2 + B^2} (\sin a \cos \varphi + \cos a \sin \varphi) = 2\sqrt{7},$$

то есть

$$\sqrt{A^2 + B^2} \sin(a + \varphi) = 2\sqrt{7}. \quad (6)$$

Пусть

$$L = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(a + \varphi)$$

есть левая часть уравнения (6). Для  $L$  имеем оценку сверху:

$$L \leq \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{(4 \cos x)^2 + (2 \sin x - 3)^2} = \sqrt{16 \cos^2 x + 4 \sin^2 x - 12 \sin x + 9}.$$

<sup>1</sup>Мы не обязаны объяснять на экзамене, откуда взялся пример  $x = 3$ . Но всё же, из каких соображений он найден? Правая часть неравенства (4) не превосходит 1, а в силу неравенства между средними левая часть (4) не меньше 1. Следовательно, неравенство (4) может быть выполнено лишь в случае равенства, которое достигается при равенстве слагаемых в левой части.

<sup>2</sup>Это метод вспомогательного аргумента, изложенный в статье «[Тригонометрические уравнения. 2](#)».

Используя основное тригонометрическое тождество  $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ , получаем:

$$L \leq \sqrt{25 - 12 \sin^2 x - 12 \sin x}.$$

В подкоренном выражении выделим полный квадрат:

$$25 - 12 \sin^2 x - 12 \sin x = 25 - 3(4 \sin^2 x + 4 \sin x + 1 - 1) = 28 - 3(2 \sin x + 1)^2.$$

Таким образом, имеем:

$$L \leq \sqrt{28 - 3(2 \sin x + 1)^2} \leq \sqrt{28} = 2\sqrt{7}. \quad (7)$$

Сопоставляя эту оценку с уравнением (6), мы видим, что это уравнение может иметь решения относительно  $a$  лишь в том случае, когда в неравенстве (7) достигается равенство, то есть при  $\sin x = -\frac{1}{2}$ . Имеем, стало быть, два случая.

1.  $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Тогда  $A = 2\sqrt{3}$ ,  $B = -4$ , и уравнение (5) принимает вид:

$$\sqrt{3} \sin a - 2 \cos a = \sqrt{7},$$

или

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \sin a - \frac{2}{\sqrt{7}} \cos a = 1. \quad (8)$$

Поскольку  $\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)^2 = 1$ , существует такой угол  $\varphi$ , что

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}, \quad \sin \varphi = \frac{2}{\sqrt{7}};$$

при этом можно выбрать  $\varphi$  на интервале  $(0; \frac{\pi}{2})$ , так что  $\varphi = \arcsin \frac{2}{\sqrt{7}}$ . Уравнение (8) теперь даёт нам:

$$\sin a \cos \varphi - \cos a \sin \varphi = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sin(a - \varphi) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a - \varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,$$

то есть

$$a = \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{2}{\sqrt{7}} + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

2.  $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Тогда  $A = -2\sqrt{3}$ ,  $B = -4$ , и уравнение (5) принимает вид:

$$-\sqrt{3} \sin a - 2 \cos a = \sqrt{7},$$

или

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \sin a + \frac{2}{\sqrt{7}} \cos a = -1.$$

Дальше действуем аналогично и получаем

$$a = -\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{2}{\sqrt{7}} + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Остаётся записать ответ.

*Ответ:* Если  $a = \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{2}{\sqrt{7}} + 2\pi k$ , то  $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$ ; если  $a = -\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{2}{\sqrt{7}} + 2\pi k$ , то  $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$  ( $k, n \in \mathbb{Z}$ ); при остальных  $a$  решений нет.



8. (МГУ, ВМК, 1989) Найти все  $a$ , при которых уравнение

$$\log_{\frac{1}{\pi}} \frac{a^2 + 4\pi^2 + 4}{4x - x^2 - 2(a - 2\pi)|x - 2| + 4\pi a} = \sqrt{(x - 5a + 10\pi - 34)(|\pi - x| - a + \pi + 2)}$$

имеет хотя бы один целочисленный корень.

$$\{x \in \mathbb{Z}, 1 - \pi \leq x \leq 8 - \pi\} \ni a$$

9. (МГУ, геологич. ф-т, 1995) При каждом  $a$  решить систему

$$\begin{cases} x \leq 1, \\ \frac{\log_2(|a|x^2 - 3x + 4)}{\log_2(-3x + 4)} = 5^{-|x|(x+1)^2}. \end{cases}$$

$$\text{Если } a \neq 0, \text{ то } x = 0, \text{ если } a = 0, \text{ то } x = 0, -1$$

10. (МГУ, геологич. ф-т, 1998) Найти все  $a$ , при которых уравнение

$$\left| \frac{x^2 - 4ax + 4a^2 + 1}{x - 2a} \right| + x^2 - 2x - 1 = 0$$

имеет хотя бы один корень.

$$1 = a \text{ или } 0 = a$$

11. (МГУ, ф-т почвоведения, 1983) Найти все  $a \in (2; 5)$ , при которых уравнение

$$\log_2(3 - |\sin ax|) = \cos\left(\pi x - \frac{\pi}{6}\right)$$

имеет хотя бы один корень на отрезке  $[2; 3]$ .

$$\frac{13}{\pi} \leq a \leq \frac{13}{2\pi}$$

12. (МГУ, филологич. ф-т, 1985) Для каждого  $a$  решить уравнение

$$3 \cos x \sin a - \sin x \cos a - 4 \cos a = 3\sqrt{3}.$$

$$\text{Если } a = \frac{6}{\pi} + 2\pi k, \text{ то } x = \frac{6}{\pi} + 2\pi n; \text{ если } a = \frac{6}{\pi} + 2\pi k, \text{ то } x = \frac{6}{\pi} + 2\pi n; \text{ при остальных } a \text{ решений нет}$$

13. (МГУ, ф-т психологии, 1988) Найти наибольшее  $a$ , при котором неравенство

$$\sqrt{a^5}(8x - x^2 - 16) + \frac{\sqrt{a}}{8x - x^2 - 16} \geq -\frac{2}{3}a|\cos \pi x|$$

имеет хотя бы одно решение.

$$\frac{6}{1}$$

14. (МГУ, ФНМ, 2004) Найти все  $b$ , при каждом из которых неравенство

$$(3 - 2\sqrt{2})^x + (b^4 + 12 - 6b^2) \cdot (3 + 2\sqrt{2})^x + 9^t + \frac{b^2}{4} + b \cdot 3^t - \sqrt{12} \leq 0$$

имеет хотя бы одно решение  $(t, x)$ .

$$\boxed{\exists b \in \mathbb{R}}$$

15. (МГУ, ФНМ, 2002) Найти все  $a$ , при каждом из которых неравенство

$$4^x + 4^{-x} + 8|2^x + 2^{-x} - a| + 11a < 26 + 2a(2^x + 2^{-x})$$

имеет хотя бы одно решение.

$$\boxed{\exists a \in \mathbb{R}}$$

16. (МГУ, ф-т почвоведения, 1994) Найти все пары  $(a, b)$ , при которых система

$$\begin{cases} a + \sin bx \leq 1, \\ x^2 + ax + 1 \leq 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$$\boxed{\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2}$$

17. (МГУ, географич. ф-т, 1986) Для каждого значения параметра  $a$ , удовлетворяющего неравенствам  $0 < a < 2$ , найдите наименьшее значение выражения

$$x^2 + y^2 - 2a(x + y)$$

при условии  $\cos \frac{\pi xy}{2} = 1$ .

$$\boxed{\text{Если } a \in (0; 1), \text{ то наименьшее значение равно } -a^2; \text{ если } a \in [1; 2), \text{ то наименьшее значение равно } -8}$$

18. (МГУ, географич. ф-т, 1985) Найдите все числа  $a$ , удовлетворяющие условию  $-1 < a < 1$ , для которых выражение

$$1 + 2\sqrt{x^2 - 2axy + y^2 - 6y + 10}$$

принимает наименьшее значение лишь при одной паре чисел  $(x, y)$ .

$$\boxed{\exists a \in (-1; 1)}$$

19. (МГУ, ф-т почвоведения, 1988) Найти все значения параметра  $p$ , при каждом из которых существует единственная пара чисел  $(x, y)$ , удовлетворяющая условиям

$$\begin{cases} x^2 + 2px + 3p^2 + 3p + 3 \leq 3 \sin y - 4 \cos y, \\ 0 \leq y \leq 2\pi. \end{cases}$$

$$\boxed{\exists p \in \mathbb{R}}$$

20. (МГУ, экономический ф-т, 2004) Найти наибольшее значение  $\omega$ , при котором имеет решение система

$$\begin{cases} 4 \sin^2 y - \omega = 16 \sin^2 \frac{2x}{7} + 9 \operatorname{ctg}^2 \frac{2x}{7}, \\ (\pi^2 \cos^2 3x - 2\pi^2 - 72) y^2 = 2\pi^2(1 + y^2) \sin 3x. \end{cases}$$

[1-]

21. (МГУ, ВМК, 1999) При каких  $a$  уравнение

$$3^{x^2+2ax+4a-3} - 2 = \left| \frac{a-2}{x+a} \right|$$

имеет ровно два корня, лежащих на отрезке  $[-4; 0]$ ?

[3:2] ∩ (2:1] ∋ v

22. (МГУ, географич. ф-т, 1999) При каких значениях параметра  $a$  система

$$\begin{cases} y^2 - (2a+1)y + a^2 + a - 2 = 0, \\ \sqrt{(x-a)^2 + y^2} + \sqrt{(x-a)^2 + (y-3)^2} = 3 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

[4:1] ∩ (1:2-]

23. (МГУ, химический ф-т, 1994) При каких  $q$  разрешима система

$$\begin{cases} x^2 + qx + 3 = 0, \\ \sin^2 q\pi + \cos^2 \frac{\pi x}{2} + 2y^2 = \sin \frac{\pi x}{2} ? \end{cases}$$

Найдите её решения.

Система разрешима при  $q = \pm 4$ . Если  $q = 4$ , то  $x = -3, y = 0$ ; если  $q = -4$ , то  $x = 1, y = 0$

24. (МГУ, мехмат, 1978) Найти все  $a$ , при которых система

$$\begin{cases} x^2 + 2xy - 7y^2 \geq \frac{1-a}{a+1}, \\ 3x^2 + 10xy - 5y^2 \leq -2 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

1- > v

25. (МГУ, мехмат, 1995) Найти все  $\alpha \in [0; 2\pi]$ , при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2z(x+y+z) - \sin \alpha = 0, \\ (x+1) \sin^2 \frac{\alpha}{2} + y^2 \sqrt{x} + \alpha^2 \sqrt{z} + \sin \frac{3\alpha}{2} = 0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

{2:2, 2:0} ∋ v



26. (МГУ, мехмат, 1988) Найти все  $a$ , при которых система

$$\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{1}{z^2}, \\ \cos x \cos y = -\frac{(x+y)^2}{(a-\pi)^2}, \\ 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}, \\ z > 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$$a \in [2\pi; 2\pi) \cap (0; 2\pi]$$

27. (МГУ, биологич. ф-т, 2003) Найти все значения  $b$ , при которых система уравнений

$$\begin{cases} (\log_b f(x) - 1)^2 + (y^2 - 5 \cdot 10^3 \cdot y + 2b)^2 = 0, \\ z^2 - (b - 2 \cdot 10^6) \cdot z + 25 \cdot 10^{10} = 0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, где

$$f(x) = |x| + |x - 1^2| + |x - 2^2| + \dots + |x - 104^2|.$$

$$b \in [286624; 1000000] \cup [3000000; 3125000]$$

28. («Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11) При каждом значении  $a$  решите уравнение

$$\begin{aligned} |x - 1| + |x + 1| + |x - 2| + |x + 2| + |x - 3| + |x + 3| + \dots + |x - 2015| + |x + 2015| + \\ + 2x^2 + 2a^2 + 4030^2 - 8060x - 8060a = 4030x. \end{aligned}$$

$$\text{Если } a = 2015, \text{ то } x = 2015; \text{ если } a \neq 2015, \text{ то решений нет}$$