

Минимаксные задачи с параметрами

Данная статья служит продолжением статьи «[Минимаксные задачи](#)», в которой были изложены основные идеи. Здесь мы разберём несколько задач и посмотрим, как минимаксные методы работают в задачах с параметрами.

Задача 1. (МГУ, геологич. ф-т, 1990) Найти все пары действительных чисел a и b , при которых уравнение

$$(3x - a^2 + ab - b^2)^2 + (2x^2 - a^2 - ab)^2 + x^2 + 9 = 6x$$

имеет хотя бы одно решение x .

Решение. Перепишем уравнение в виде:

$$(3x - a^2 + ab - b^2)^2 + (2x^2 - a^2 - ab)^2 + (x - 3)^2 = 0.$$

Сумма квадратов, будучи неотрицательной, равна нулю тогда и только тогда, когда каждое слагаемое обращается в нуль. Таким образом, наше уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 3x - a^2 + ab - b^2 = 0, \\ 2x^2 - a^2 - ab = 0, \\ x - 3 = 0. \end{cases}$$

Из третьего уравнения имеем $x = 3$; подставляя это значение в первое и второе уравнения, получим систему

$$\begin{cases} a^2 - ab + b^2 = 9, \\ a^2 + ab = 18. \end{cases} \quad (1)$$

Умножим первое уравнение системы (1) на -2 и сложим со вторым уравнением. Придём к уравнению

$$a^2 - 3ab + 2b^2 = 0,$$

то есть

$$(a - b)(a - 2b) = 0.$$

Отсюда $a = b$ или $a = 2b$. Подставляя это в любое из уравнений системы (1) (проще во второе), найдём в итоге искомые пары (a, b) .

Ответ: $(3, 3)$, $(-3, -3)$, $(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$, $(-2\sqrt{3}, -\sqrt{3})$.

Задача 2. (МГУ, ф-т почвоведения, 1983) Найти все значения α , которые удовлетворяют условию $5 < \alpha < 16$ и при которых уравнение

$$1 + \cos^2 \left(\frac{\alpha x}{2} + \frac{3\pi}{8} \right) = \left(\frac{1}{3} \right)^{|\cos \pi x - \sin \pi x|}$$

относительно x имеет хотя бы одно решение, удовлетворяющее условию $1 \leq x \leq 2$.

Решение. Поскольку выполнены неравенства

$$1 + \cos^2 \left(\frac{\alpha x}{2} + \frac{3\pi}{8} \right) \geq 1, \quad \left(\frac{1}{3} \right)^{|\cos \pi x - \sin \pi x|} \leq 1,$$

наше уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 1 + \cos^2 \left(\frac{\alpha x}{2} + \frac{3\pi}{8} \right) = 1, \\ \left(\frac{1}{3} \right)^{|\cos \pi x - \sin \pi x|} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\alpha x}{2} + \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ \cos \pi x - \sin \pi x = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения легко находим: $\pi x = \frac{\pi}{4} + \pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$), то есть $x = \frac{1}{4} + k$. По условию должно быть выполнено двойное неравенство $1 \leq x \leq 2$; следовательно, подходит единственное значение $k = 1$, при котором $x = \frac{5}{4}$.

Подставляя $x = \frac{5}{4}$ в первое уравнение системы, получим

$$\alpha = \frac{\pi(1 + 8n)}{5}.$$

По условию должно быть $5 < \alpha < 16$; значит, годятся значения $n = 1, 2, 3$. В самом деле:

$$\begin{aligned} n \leq 0 &\Rightarrow \alpha \leq \frac{\pi}{5} < 1 < 5; \\ n = 1 &\Rightarrow \alpha = \frac{9\pi}{5} > \frac{9 \cdot 3}{5} > 5; \\ n = 3 &\Rightarrow \alpha = 5\pi < 5 \cdot 3,2 = 16; \\ n \geq 4 &\Rightarrow \alpha \geq \frac{33\pi}{5} > \frac{33 \cdot 3}{5} > 16. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{9\pi}{5}$, $\frac{17\pi}{5}$, 5π .

Задача 3. (МГУ, ф-т психологии, 1988) Найдите наибольшее значение параметра a , при котором неравенство

$$a\sqrt{a}(x^2 - 2x + 1) + \frac{\sqrt{a}}{x^2 - 2x + 1} \leq \sqrt[4]{a^3} \cdot \left| \sin \frac{\pi x}{2} \right|$$

имеет хотя бы одно решение.

Решение. Для удобства сделаем замену $b = \sqrt[4]{a}$. Тогда неравенство примет вид

$$b^6(x-1)^2 + \frac{b^2}{(x-1)^2} \leq b^3 \left| \sin \frac{\pi x}{2} \right|. \quad (2)$$

Если $b = 0$, то любое значение $x \neq 1$ является решением неравенства (2), поэтому $b = 0$ годится. Теперь надо выяснить, существуют ли $b > 0$, при которых неравенство (2) имеет решения. В предположении $b > 0$ делим обе части неравенства (2) на b^3 :

$$b^3(x-1)^2 + \frac{1}{b(x-1)^2} \leq \left| \sin \frac{\pi x}{2} \right|. \quad (3)$$

В силу неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим имеем оценку снизу для левой части неравенства (3):

$$b^3(x-1)^2 + \frac{1}{b(x-1)^2} \geq 2 \cdot \sqrt{b^3(x-1)^2 \cdot \frac{1}{b(x-1)^2}} = 2b.$$

Вместе с тем для правой части неравенства (3) имеем очевидную оценку сверху: $\left| \sin \frac{\pi x}{2} \right| \leq 1$. Поэтому если $2b > 1$, то неравенство (3) не имеет решений; значит, неравенство (3) может иметь решения лишь при условии $2b \leq 1$, то есть при $b \leq \frac{1}{2}$.

Покажем, что при $b = \frac{1}{2}$ неравенство (3) имеет решения. С этим b оно примет вид

$$\frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{2}{(x-1)^2} \leq \left| \sin \frac{\pi x}{2} \right|. \quad (4)$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что при $x = 3$ неравенство (4) выполнено¹. Итак, наибольшее значение b равно $\frac{1}{2}$, и потому искомое наибольшее значение a равно $\frac{1}{16}$.

Ответ: $\frac{1}{16}$.

Задача 4. (МГУ, филологич. ф-т, 1985) Для каждого значения a решить уравнение

$$4 \cos x \sin a + 2 \sin x \cos a - 3 \cos a = 2\sqrt{7}.$$

Решение. Здесь работает идея, которая обсуждалась в статье «[Параметр как переменная](#)». Мы меняем ролями величины x и a , воспринимая наше уравнение как уравнение относительно переменной a с параметром x .

Переписываем уравнение в следующем виде:

$$A \sin a + B \cos a = 2\sqrt{7}, \quad (5)$$

где

$$A = 4 \cos x, \quad B = 2 \sin x - 3.$$

Замечая, что $B \neq 0$ при любом x , преобразуем² уравнение (5):

$$\sqrt{A^2 + B^2} \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin a + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos a \right) = 2\sqrt{7}.$$

Поскольку

$$\left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right)^2 + \left(\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right)^2 = 1,$$

существует угол φ такой, что

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \cos \varphi, \quad \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \sin \varphi.$$

Тем самым уравнение (5) приобретает вид:

$$\sqrt{A^2 + B^2} (\sin a \cos \varphi + \cos a \sin \varphi) = 2\sqrt{7},$$

то есть

$$\sqrt{A^2 + B^2} \sin(a + \varphi) = 2\sqrt{7}. \quad (6)$$

Пусть

$$L = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(a + \varphi)$$

есть левая часть уравнения (6). Для L имеем оценку сверху:

$$L \leq \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{(4 \cos x)^2 + (2 \sin x - 3)^2} = \sqrt{16 \cos^2 x + 4 \sin^2 x - 12 \sin x + 9}.$$

¹Мы не обязаны объяснять на экзамене, откуда взялся пример $x = 3$. Но всё же, из каких соображений он найден? Правая часть неравенства (4) не превосходит 1, а в силу неравенства между средними левая часть (4) не меньше 1. Следовательно, неравенство (4) может быть выполнено лишь в случае равенства, которое достигается при равенстве слагаемых в левой части.

²Это метод вспомогательного аргумента, изложенный в статье «[Тригонометрические уравнения. 2](#)».

Используя основное тригонометрическое тождество $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, получаем:

$$L \leq \sqrt{25 - 12 \sin^2 x - 12 \sin x}.$$

В подкоренном выражении выделим полный квадрат:

$$25 - 12 \sin^2 x - 12 \sin x = 25 - 3(4 \sin^2 x + 4 \sin x + 1 - 1) = 28 - 3(2 \sin x + 1)^2.$$

Таким образом, имеем:

$$L \leq \sqrt{28 - 3(2 \sin x + 1)^2} \leq \sqrt{28} = 2\sqrt{7}. \quad (7)$$

Сопоставляя эту оценку с уравнением (6), мы видим, что это уравнение может иметь решения относительно a лишь в том случае, когда в неравенстве (7) достигается равенство, то есть при $\sin x = -\frac{1}{2}$. Имеем, стало быть, два случая.

1. $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Тогда $A = 2\sqrt{3}$, $B = -4$, и уравнение (5) принимает вид:

$$\sqrt{3} \sin a - 2 \cos a = \sqrt{7},$$

или

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \sin a - \frac{2}{\sqrt{7}} \cos a = 1. \quad (8)$$

Поскольку $\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)^2 = 1$, существует такой угол φ , что

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}, \quad \sin \varphi = \frac{2}{\sqrt{7}};$$

при этом можно выбрать φ на интервале $(0; \frac{\pi}{2})$, так что $\varphi = \arcsin \frac{2}{\sqrt{7}}$. Уравнение (8) теперь даёт нам:

$$\sin a \cos \varphi - \cos a \sin \varphi = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sin(a - \varphi) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a - \varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,$$

то есть

$$a = \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{2}{\sqrt{7}} + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

2. $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Тогда $A = -2\sqrt{3}$, $B = -4$, и уравнение (5) принимает вид:

$$-\sqrt{3} \sin a - 2 \cos a = \sqrt{7},$$

или

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \sin a + \frac{2}{\sqrt{7}} \cos a = -1.$$

Дальше действуем аналогично и получаем

$$a = -\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{2}{\sqrt{7}} + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Остаётся записать ответ.

Ответ: Если $a = \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{2}{\sqrt{7}} + 2\pi k$, то $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$; если $a = -\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{2}{\sqrt{7}} + 2\pi k$, то $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$ ($k, n \in \mathbb{Z}$); при остальных a решений нет.