

Область значений функции

Как вы знаете, у всякой функции $y = f(x)$ имеется область определения и область значений. Область определения $D(f)$ — это множество допустимых значений независимой переменной x . Область значений $E(f)$ — это множество, которое пробегает зависимая переменная y , когда переменная x пробегает область определения $D(f)$.

Например, область значений функции $y = x^2$ есть луч $[0; +\infty)$; область значений функции $y = \sin x$ есть отрезок $[-1; 1]$.

Число a принадлежит области значений функции $f(x)$ тогда и только тогда, когда найдётся такой x , что $f(x) = a$. Таким образом, нахождение области значений есть задача с параметром: *область значений функции $f(x)$ — это множество всех значений параметра a , при которых уравнение $f(x) = a$ имеет решение.*

Задача 1. Найти область значений функции $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

Решение. Искомая область значений есть множество всех a , при которых уравнение

$$x + \frac{1}{x} = a$$

имеет решение. Преобразуем:

$$\frac{x^2 - ax + 1}{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - ax + 1 = 0.$$

Полученное квадратное уравнение имеет корни при неотрицательном дискриминанте:

$$D = a^2 - 4 \geq 0,$$

откуда $a \leq -2$ или $a \geq 2$.

Ответ: $E(f) = (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

Запомните этот факт: *сумма двух взаимно обратных чисел по модулю не меньше 2*. Он может вам пригодиться впоследствии.

К нахождению области значений естественным образом сводятся некоторые задачи на вычисление наибольших и наименьших значений функций.

Задача 2. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = \frac{x}{x^2 - x + 1}$.

Решение. Давайте просто найдём область значений данной функции. Ищем все значения a , при которых уравнение

$$\frac{x}{x^2 - x + 1} = a$$

имеет решения. Умножаем обе части на выражение $x^2 - x + 1$, которое не обращается в нуль ни при каком x , и после преобразований получаем:

$$ax^2 - (a + 1)x + a = 0. \tag{1}$$

Если $a = 0$, то уравнение (1) имеет корень $x = 0$, так что $a = 0$ годится.

Если $a \neq 0$, то уравнение (1) является квадратным. Чтобы оно имело корни, его дискриминант должен быть неотрицателен:

$$D = -3a^2 + 2a + 1 \geq 0,$$

откуда $-\frac{1}{3} \leq a \leq 1$. Этот отрезок содержит значение $a = 0$, полученное ранее.

Итак, мы нашли область значений: $E(f) = [-\frac{1}{3}; 1]$. Теперь ясно, что наибольшее значение функции f равно 1, а наименьшее значение равно $-\frac{1}{3}$.

Ответ: 1 и $-\frac{1}{3}$.

Задача 3. (МГУ, экономич. ф-т, 1998) Найти все действительные значения c , для которых все числа из области значений функции

$$f(x) = \frac{x^2 + cx - 1}{2x^2 - 3x + 2}$$

принадлежат интервалу $(-1; 2)$.

Решение. Область значений $E(f)$ состоит из всех таких чисел t , для которых уравнение

$$\frac{x^2 + cx - 1}{2x^2 - 3x + 2} = t$$

имеет решения. После равносильных преобразований ($2x^2 - 3x + 2 \neq 0$ при любом x) данное уравнение приводится к виду

$$(2t - 1)x^2 - (3t + c)x + 2t + 1 = 0. \quad (2)$$

Значение $t = \frac{1}{2}$ можно не рассматривать, поскольку оно принадлежит интервалу $(-1; 2)$, и тем самым нам не важно, принадлежит оно множеству $E(f)$ или нет.

Если $t \neq \frac{1}{2}$, то уравнение (2) является квадратным и имеет корни в том и только в том случае, когда его дискриминант неотрицателен:

$$D = (3t + c)^2 - 4(2t - 1)(2t + 1) = -7t^2 + 6ct + c^2 + 4 \geq 0.$$

Таким образом, мы ищем все значения c , при которых все решения неравенства

$$7t^2 - 6ct - c^2 - 4 \leq 0 \quad (3)$$

расположены на интервале $(-1; 2)$. Пусть

$$g(t) = 7t^2 - 6ct - c^2 - 4.$$

Квадратный трёхчлен $g(t)$ имеет два различных корня t_1 и t_2 при любом c (поскольку его дискриминант $64c^2 + 112$ всегда положителен), и множеством решений неравенства (3) является отрезок $[t_1; t_2]$. Нам нужно, чтобы этот отрезок находился внутри интервала $(-1; 2)$, то есть чтобы были выполнены условия $t_1 > -1$ и $t_2 < 2$.

Мы получили стандартную ситуацию расположения корней квадратного трёхчлена внутри заданного промежутка (см. листок «[Параметры и квадратный трёхчлен. 2](#)»). Именно, корни квадратного трёхчлена $g(t)$ принадлежат интервалу $(-1; 2)$ тогда и только тогда, когда выполнена система неравенств (t_0 — абсцисса вершины параболы $y = g(t)$):

$$\begin{cases} g(-1) > 0, \\ g(2) > 0, \\ -1 < t_0 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c^2 - 6c - 3 < 0, \\ c^2 + 12c - 24 < 0, \\ -\frac{7}{3} < c < \frac{14}{3}. \end{cases}$$

Оставшиеся вычисления вы легко выполните сами.

Ответ: $c \in (3 - 2\sqrt{3}; 2\sqrt{15} - 6)$.

Задача 4. При каких a уравнение

$$(a + 1) \left(\frac{x^2}{x^2 + 1} \right)^2 - \frac{3ax^2}{x^2 + 1} + 4a = 0$$

имеет корни?

Решение. Разумеется, мы делаем замену

$$t = \frac{x^2}{x^2 + 1}, \quad (4)$$

но ещё предстоит выяснить, в каком диапазоне меняется t , когда x пробегает всё множество \mathbb{R} . Иными словами, нам нужно найти область значений функции $t(x)$.

Определим, при каких t уравнение (4) имеет решения. Оно равносильно уравнению

$$(1 - t)x^2 = t.$$

Если $t = 1$, то решений нет. Если $t \neq 1$, то

$$x^2 = \frac{t}{1 - t},$$

и условием наличия решений служит неравенство

$$\frac{t}{1 - t} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq t < 1.$$

Итак, $E(t) = [0; 1)$. Замена (4) приводит исходное уравнение к квадратному:

$$(a + 1)t^2 - 3at + 4a = 0. \quad (5)$$

Следовательно, исходное уравнение имеет корни тогда и только тогда, когда уравнение (5) имеет хотя бы один корень на промежутке $[0; 1)$.

Дискриминант уравнения (5) должен быть неотрицателен:

$$D = -7a^2 - 16a = -a(7a + 16) \geq 0.$$

Рассмотрим сначала случай $D = 0$, то есть $a = 0$ или $a = -\frac{16}{7}$. Уравнение (5) имеет единственный корень $t_0 = \frac{3a}{2(a+1)}$. Если $a = 0$, то $t_0 = 0 \in [0; 1)$; поэтому $\boxed{a = 0}$ годится. Если же $a = -\frac{16}{7}$, то $t_0 = -\frac{24}{23} \notin [0; 1)$; поэтому $a = -\frac{16}{7}$ не годится.

Пусть теперь $D > 0$, то есть

$$-\frac{16}{7} < a < 0. \quad (6)$$

Уравнение (5) имеет два различных корня. Интересующая нас ситуация, когда хотя бы один из них расположен на промежутке $[0; 1)$, логически исчерпывается следующими четырьмя вариантами.

1. *Один из корней равен нулю.*

Подставляя $t = 0$ в уравнение (5), получим $a = 0$. Значит, только при $a = 0$ уравнение (5) может иметь нулевой корень, и потому данный вариант не реализуется.

2. Один корень лежит внутри интервала $(0; 1)$, а второй — вне отрезка $[0; 1]$.

Данный вариант реализуется тогда и только тогда, когда функция

$$f(t) = (a + 1)t^2 - 3at + 4a$$

принимает в точках 0 и 1 ненулевые значения разных знаков:

$$f(0) \cdot f(1) < 0 \Leftrightarrow 4a(2a + 1) < 0 \Leftrightarrow \boxed{-\frac{1}{2} < a < 0.}$$

Все значения в рамочке подходят, так как удовлетворяют неравенству (6).

3. Один корень лежит внутри интервала $(0; 1)$, а второй равен 1.

Подставляя $t = 1$ в уравнение (5), получим $2a + 1 = 0$, то есть $a = -\frac{1}{2}$. При этом a уравнение (5) примет вид:

$$\frac{1}{2} \cdot t^2 + \frac{3}{2} \cdot t - 2 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 3t - 4 = 0.$$

Второй корень полученного уравнения равен $-4 \notin (0; 1)$, так что $a = -\frac{1}{2}$ не годится. Стало быть, данный вариант не реализуется.

4. Оба корня лежат внутри интервала $(0; 1)$.

Необходимым и достаточным условием такого расположения корней (в рамках текущего случая $D > 0$) служит система (где t_0 — абсцисса вершины параболы $y = f(t)$):

$$\begin{cases} (a + 1)f(0) > 0, \\ (a + 1)f(1) > 0, \\ 0 < t_0 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a + 1)a > 0, \\ (a + 1)(2a + 1) > 0, \\ 0 < \frac{3a}{a + 1} < 1. \end{cases}$$

Полученная система решений не имеет (убедитесь в этом самостоятельно), поэтому данный вариант не реализуется.

Остаётся собрать «рамочки» по всем рассмотренным случаям и записать ответ.

Ответ: $a \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right]$.

Задачи

1. (МГУ, экономич. ф-т, 1985) Найти наименьшее значение функции

$$f(x) = \frac{2x^2 + x + 1}{3x^2 - x + 2}.$$

$\frac{88}{2}$

2. (МГУ, химический ф-т, 1991) Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = \frac{3x + 1}{(3x + 1)^2 + 1}.$$

$\frac{88}{1}$ и $\frac{88}{1}$

3. («Покори Воробьёвы горы!», 2016) При каких значениях a и b неравенство

$$b < 16^{\frac{2x-1}{4x^2-4x+5}} \leq a$$

выполняется для всех действительных x ?

$$\frac{c}{1} > q \cdot z \leq v$$

4. («Покори Воробьёвы горы!», 2015) Найдите все значения a , при которых существует целое число n , удовлетворяющее уравнению

$$n^2 \cdot 3^a - 3^a - 16n = 9 \cdot 3^{-a} - 3^{2-a} \cdot n^2.$$

$$\frac{\varepsilon}{2 \wedge 9 \mp 9 \Gamma} \varepsilon \delta \sigma \Gamma = v \text{ или } \Gamma = v$$

5. (МГУ, экономич. ф-т, 1998) Найти все a , при которых область значений функции

$$f(x) = \frac{x^2 + 2ax - 4}{x^2 - 2x + 3}$$

содержится в интервале $(-3; 2)$.

$$(z - 0 \Gamma \wedge \varepsilon \wedge z - \varepsilon) \ni v$$

6. (МГУ, ф-т психологии, 1999) Найти все a , при которых область значений функции

$$f(x) = \frac{3x + a}{x^2 + 5x + 7}$$

содержит промежуток $(-1; 3]$. При каждом таком a найти область значений этой функции.

$$[\varepsilon : \Gamma -] = (f) \varepsilon : 6 = v$$

7. (МГУ, геологич. ф-т, 1988) Найти все a , при которых область значений функции

$$f(x) = \frac{\sin x + 2(1 - a)}{a - \cos^2 x}$$

содержит отрезок $[1; 2]$.

$$[\frac{z \varepsilon}{\varepsilon \varepsilon} : \frac{\Gamma}{\varepsilon}] \cap (\frac{\Gamma}{\varepsilon} : \frac{\varepsilon}{\Gamma}] \ni v$$

8. (МГУ, ф-т психологии, 1997) Найти все a , при которых уравнение

$$4^x + 2^{x+2} + 7 = a - 4^{-x} - 2 \cdot 2^{1-x}$$

имеет хотя бы один корень.

$$\Delta \Gamma \leq v$$

9. (МГУ, физический ф-т, 2000) Найти все a , при которых уравнение

$$25^x - (2a + 5) \cdot 5^{x - \frac{1}{x}} + 10a \cdot 5^{-\frac{2}{x}} = 0$$

имеет ровно два корня.

$$(\infty + ; \frac{7}{25}) \cap (\frac{9}{1} ; 0) \ni a$$

10. (МГУ, экономич. ф-т, 1978) Найти все a , при которых неравенство

$$a(4 - \sin x)^4 - 3 + \cos^2 x + a > 0$$

выполняется для всех x .

$$\frac{78}{8} < a$$

11. (МГУ, мехмат, 2001) Найти все x , которые не являются корнями уравнения

$$4\sqrt{2x^4 + x^3} = a\sqrt{4 - a^4} (x + 4x^2 - 8)$$

ни при каком a .

$$(\infty + ; \frac{6}{8}) \cap (0 ; \frac{7}{1} -) \cap (\frac{1}{8} - ; \infty -) \ni x$$

12. (МГУ, ф-т психологии, 1991) При каждом $a \geq \frac{1}{2\pi}$ решить уравнение

$$\cos \frac{2x + a}{2x^2 + 2ax + \frac{5a^2}{2}} = \cos \frac{2x - a}{2x^2 - 2ax + \frac{5a^2}{2}}.$$

$$\frac{7}{8} \sqrt{a} \mp \pi = x$$

13. (МГУ, ВМК, 2004) Для каждого значения параметра a найдите число решений уравнения

$$81^x - 8 \cdot 27^x + (20 - 2a) \cdot 9^x + (8a - 21) \cdot 3^x + a^2 - 5a + 6 = 0.$$

$$\begin{aligned} & \text{при } a \leq 3 \text{ два решения; при } 3 < a \leq 20 \text{ три решения; при } 20 < a \leq 21 \text{ четыре решения; при } 21 < a \leq 22 \text{ пять решений; при } 22 < a \leq 23 \text{ шесть решений; при } 23 < a \leq 24 \text{ семь решений; при } 24 < a \leq 25 \text{ восемь решений; при } 25 < a \leq 26 \text{ девять решений; при } 26 < a \leq 27 \text{ десять решений; при } 27 < a \leq 28 \text{ одиннадцать решений; при } 28 < a \leq 29 \text{ двенадцать решений; при } 29 < a \leq 30 \text{ тринадцать решений; при } 30 < a \leq 31 \text{ четырнадцать решений; при } 31 < a \leq 32 \text{ пятнадцать решений; при } 32 < a \leq 33 \text{ шестнадцать решений; при } 33 < a \leq 34 \text{ семнадцать решений; при } 34 < a \leq 35 \text{ восемнадцать решений; при } 35 < a \leq 36 \text{ девятнадцать решений; при } 36 < a \leq 37 \text{ двадцать решений; при } 37 < a \leq 38 \text{ двадцать один решение; при } 38 < a \leq 39 \text{ двадцать два решения; при } 39 < a \leq 40 \text{ двадцать три решения; при } 40 < a \leq 41 \text{ двадцать четыре решения; при } 41 < a \leq 42 \text{ двадцать пять решений; при } 42 < a \leq 43 \text{ двадцать шесть решений; при } 43 < a \leq 44 \text{ двадцать семь решений; при } 44 < a \leq 45 \text{ двадцать восемь решений; при } 45 < a \leq 46 \text{ двадцать девять решений; при } 46 < a \leq 47 \text{ тридцать решений; при } 47 < a \leq 48 \text{ тридцать один решение; при } 48 < a \leq 49 \text{ тридцать два решения; при } 49 < a \leq 50 \text{ тридцать три решения; при } 50 < a \leq 51 \text{ тридцать четыре решения; при } 51 < a \leq 52 \text{ тридцать пять решений; при } 52 < a \leq 53 \text{ тридцать шесть решений; при } 53 < a \leq 54 \text{ тридцать семь решений; при } 54 < a \leq 55 \text{ тридцать восемь решений; при } 55 < a \leq 56 \text{ тридцать девять решений; при } 56 < a \leq 57 \text{ сорок решений; при } 57 < a \leq 58 \text{ сорок один решение; при } 58 < a \leq 59 \text{ сорок два решения; при } 59 < a \leq 60 \text{ сорок три решения; при } 60 < a \leq 61 \text{ сорок четыре решения; при } 61 < a \leq 62 \text{ сорок пять решений; при } 62 < a \leq 63 \text{ сорок шесть решений; при } 63 < a \leq 64 \text{ сорок семь решений; при } 64 < a \leq 65 \text{ сорок восемь решений; при } 65 < a \leq 66 \text{ сорок девять решений; при } 66 < a \leq 67 \text{ пятьдесят решений; при } 67 < a \leq 68 \text{ пятьдесят один решение; при } 68 < a \leq 69 \text{ пятьдесят два решения; при } 69 < a \leq 70 \text{ пятьдесят три решения; при } 70 < a \leq 71 \text{ пятьдесят четыре решения; при } 71 < a \leq 72 \text{ пятьдесят пять решений; при } 72 < a \leq 73 \text{ пятьдесят шесть решений; при } 73 < a \leq 74 \text{ пятьдесят семь решений; при } 74 < a \leq 75 \text{ пятьдесят восемь решений; при } 75 < a \leq 76 \text{ пятьдесят девять решений; при } 76 < a \leq 77 \text{ шестьдесят решений; при } 77 < a \leq 78 \text{ шестьдесят один решение; при } 78 < a \leq 79 \text{ шестьдесят два решения; при } 79 < a \leq 80 \text{ шестьдесят три решения; при } 80 < a \leq 81 \text{ шестьдесят четыре решения; при } 81 < a \leq 82 \text{ шестьдесят пять решений; при } 82 < a \leq 83 \text{ шестьдесят шесть решений; при } 83 < a \leq 84 \text{ шестьдесят семь решений; при } 84 < a \leq 85 \text{ шестьдесят восемь решений; при } 85 < a \leq 86 \text{ шестьдесят девять решений; при } 86 < a \leq 87 \text{ семьдесят решений; при } 87 < a \leq 88 \text{ семьдесят один решение; при } 88 < a \leq 89 \text{ семьдесят два решения; при } 89 < a \leq 90 \text{ семьдесят три решения; при } 90 < a \leq 91 \text{ семьдесят четыре решения; при } 91 < a \leq 92 \text{ семьдесят пять решений; при } 92 < a \leq 93 \text{ семьдесят шесть решений; при } 93 < a \leq 94 \text{ семьдесят семь решений; при } 94 < a \leq 95 \text{ семьдесят восемь решений; при } 95 < a \leq 96 \text{ семьдесят девять решений; при } 96 < a \leq 97 \text{ восемьдесят решений; при } 97 < a \leq 98 \text{ восемьдесят один решение; при } 98 < a \leq 99 \text{ восемьдесят два решения; при } 99 < a \leq 100 \text{ восемьдесят три решения.} \end{aligned}$$

14. (МГУ, ф-т психологии, 2005) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых функция

$$f(x) = \frac{4 \sin x + a}{4a - 2 \sin x}$$

принимает все значения из отрезка $[0; 1]$.

$$[2; 0) \cap (0; 2-] \ni a$$

15. (МГУ, геологич. ф-т, 2006) Найдите все значения a , при которых наибольшее значение функции

$$f(x) = 2x^2 + x(5 - 3a) + a^2 - 3a + 4$$

на отрезке с концами в точках $a - 1$ и -4 минимально. Укажите это значение.

$$a = -5. \text{ Искомое значение равно } -4$$

16. (МГУ, химический ф-т, 2008) Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$x^4 + (a + 1)x^3 + (2a + 1)x^2 - (a + 1)x + 1 = 0$$

на промежутке $(-\infty; -1)$ имеет не менее двух корней.

$$\boxed{\xi^{\zeta} + \xi < \nu}$$