Параметры. Уравнения высших порядков

Задача 1. (*«Ломоносов», 2011, 10–11*) При каких значениях a, b и c множество действительных корней уравнения

$$x^5 + 2x^4 + ax^2 + b = cx \tag{1}$$

состоит в точности из чисел -1 и 1?

Решение. Число $x = 1$ является корнем уравнения (1) в том и только в том случае, если выполнено равенство

$$3 + a + b = c. \tag{2}$$

Аналогично, $x = -1$ является корнем уравнения (1) тогда и только тогда, когда выполнено равенство

$$1 + a + b = -c. \tag{3}$$

Вычитая из равенства (2) равенство (3), получим $c = 1$. Тогда любое из этих равенств приводит к соотношению $b = -a - 2$. В итоге уравнение (1) принимает вид

$$x^5 + 2x^4 + ax^2 - x - a - 2 = 0. \tag{4}$$

Как мы уже знаем, уравнение (4) имеет корни ± 1, поэтому выделяем множитель $x^2 - 1$:

$$\begin{aligned} &x^5 + 2x^4 + ax^2 - x - a - 2 = \\ &= (x^5 - x^3) + (x^3 - x) + (2x^4 - 2x^2) + (2x^2 - 2) + (ax^2 - a) = (x^2 - 1)(x^3 + 2x^2 + x + a + 2). \end{aligned}$$

Таким образом, уравнение (4) имеет вид

$$(x^2 - 1)(x^3 + 2x^2 + x + a + 2) = 0.$$

Множество корней данного уравнения состоит из чисел ± 1 и корней уравнения

$$x^3 + 2x^2 + x + a + 2 = 0. \tag{5}$$

При любом a уравнение (5) имеет хотя бы один корень, поскольку функция $y = x^3 + 2x^2 + x + a + 2$ является непрерывной, принимает отрицательные значения при $x \to -\infty$ и положительные — при $x \to +\infty$, и, стало быть при некотором x обращается в нуль. Нам нужно, чтобы корни уравнения (5) не отличались от ± 1.

Если $x = 1$ является корнем уравнения (5), то выполнено

$$4 + a + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = -6.$$

Это необходимое условие на параметр a; проверим его достаточность[1]. Подставляем $a = -6$ в уравнение (5):

$$x^3 + 2x^2 + x - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - 1)(x^2 + 3x + 4) = 0.$$

Квадратный трёхчлен $x^2 + 3x + 4$ не имеет корней, так что $x = 1$ — единственный корень уравнения (5). Следовательно, в случае $a = -6$ (и соответственно $b = 4$, $c = 1$) корни уравнения (1) в самом деле образуют множество $\{-1, 1\}$.

[1] О понятиях необходимости и достаточности рассказано в статье «Необходимые и достаточные условия».

Если же $x=-1$ является корнем уравнения (5), то выполнено

$$a+2=0 \quad \Leftrightarrow \quad a=-2.$$

При таком a уравнение (5) принимает вид

$$x^3+2x^2+x=0$$

и имеет корень $x=0$ (который соответственно является корнем исходного уравнения (1)). Поэтому значение $a=-2$ нам не подходит.

Ответ: $a=-6$, $b=4$, $c=1$.

Задача 2. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11*) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых среди решений уравнения

$$\left(a^4+2014a^3+2014a^2+2014a+2013\right)x=a^3+3a^2-6a-8 \tag{6}$$

есть неотрицательные числа.

Решение. Многочлен $a^4+2014a^3+2014a^2+2014a+2013$ имеет корень $a=-1$ и раскладывается на множители:

$$a^4+2014a^3+2014a^2+2014a+2013=(a+1)\left(a^3+2013a^2+a+2013\right).$$

Кубический многочлен в скобках раскладывается на множители непосредственной группировкой:

$$a^3+2013a^2+a+2013=\left(a^2+1\right)(a+2013).$$

Аналогично раскладывается на множители и правая часть уравнения (6):

$$a^3+3a^2-6a-8=\left(a^3-8\right)+3a(a-2)=(a-2)\left(a^2+5a+4\right)=(a-2)(a+1)(a+4).$$

Таким образом, уравнение (6) эквивалентно уравнению

$$(a+1)\left(a^2+1\right)(a+2013)x=(a-2)(a+1)(a+4). \tag{7}$$

Если $a=-1$, то уравнение (7) принимает вид $0\cdot x=0$. Решением такого уравнения является любое число (в частности, неотрицательное). Поэтому значение $a=-1$ годится.

Если $a=-2013$, то уравнение (7) принимает вид $0\cdot x=-2015\cdot 2012\cdot 2009$. Такое уравнение не имеет корней. Значит, данное значение a не подходит.

Если $a\neq-1$ и $a\neq-2013$, то уравнение (7) имеет единственное решение

$$x=\frac{(a-2)(a+4)}{(a^2+1)(a+2013)}.$$

Остаётся найти все те значения a, при которых выполнено неравенство

$$\frac{(a-2)(a+4)}{(a^2+1)(a+2013)}\geqslant 0.$$

Это легко делается методом интервалов.

Ответ: $(-2013;-4]\cup\{-1\}\cup[2;+\infty)$.

Задача 3. (*МГУ, социологич. ф-т, 2003*) Определите все значения параметра a, при каждом из которых три различных корня уравнения

$$x^3+(a^2-15a)x^2+12ax-216=0 \tag{8}$$

образуют геометрическую прогрессию. Найдите эти корни.

Решение. Запишем формулы Виета для уравнения (8):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 15a - a^2, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 12a, \\ x_1x_2x_3 = 216. \end{cases} \qquad (9)$$

Числа x_1, x_2 и x_3 (в указанном порядке) образуют геометрическую прогрессию тогда и только тогда, когда выполнено равенство $x_2^2 = x_1x_3$ (см. статью «Геометрическая прогрессия»). В таком случае из третьего уравнения системы (9) находим $x_2^3 = 216$, то есть $x_2 = 6$, и тогда $x_1x_3 = 36$. Подставляя это в первые два уравнения (9), получим:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 15a - a^2 - 6, \\ 6(x_1 + x_2) = 12a - 36, \end{cases}$$

откуда

$$15a - a^2 - 6 = 2a - 6 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 - 13a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0 \text{ или } a = 13.$$

Мы получили *необходимое* условие на параметр a: именно, предположив, что корни образуют геометрическую прогрессию, мы пришли к выводу, что a может принимать лишь значения 0 или 13 (и никакие другие). Но пока не факт, что оба полученных значения годятся, и теперь надо проверить *достаточность*: при каком из этих значений a имеются три различных корня, образующих геометрическую прогрессию.

Если $a = 0$, то уравнение (8) принимает вид $x^3 - 216 = 0$; это уравнение имеет единственный корень $x = 6$. Поэтому значение $a = 0$ не годится.

Если $a = 13$, то уравнение (8) принимает вид

$$x^3 - 26x^2 + 156x - 216 = 0.$$

Знание корня $x = 6$ облегчает разложение на множители:

$$0 = (x^3 - 216) - (26x^2 - 156) = (x - 6)(x^2 + 6x + 36) - 26(x - 6) = \\ = (x - 6)(x^2 - 20x + 36) = (x - 6)(x - 2)(x - 18).$$

Как видим, уравнение имеет три различных корня 2, 6 и 18, которые образуют геометрическую прогрессию. Следовательно, значение $a = 13$ нам подходит.

Ответ: $a = 13$; корни 2, 6, 18.

Задачи

1. (*«Ломоносов», 2011, 10–11*) При каких значениях a, b и c множество действительных корней уравнения

$$x^5 + 2x^4 + ax^2 + bx = c$$

состоит в точности из чисел -1 и 1?

$a = -6$, $b = -1$, $c = -4$

2. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11*) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых среди решений уравнения

$$\left(a^4 - 2014a^3 + 2014a^2 - 2014a + 2013\right) x = a^3 + 5a^2 + 2a - 8$$

есть неотрицательные числа.

$[-4; -2] \cup \{1\} \cup (2013; +\infty)$

3. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2011, 10–11*) Найти все значения a, при каждом из которых уравнение

$$x^3 - ax^2 - (a^3 - 6a^2 + 5a + 8)x - (a - 3)^3 = 0$$

имеет три различных корня, образующих геометрическую прогрессию (укажите эти корни).

Если $a = 2$, то $x \in \left\{\frac{3-\sqrt{5}}{2}, -1, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$; если $a = 4$, то $x \in \left\{\frac{3-\sqrt{5}}{2}, 1, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$

4. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017, 10–11*) Найдите все целочисленные значения a, b, c такие, что существуют три различных корня уравнения

$$x^3 + (8 + b)x^2 + (b + 4)x + (c + 3) = 0,$$

которые являются корнями уравнения

$$x^4 + 5x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

$a = 5$, $b = -5$, $c = -6$

5. (*МГУ, социологич. ф-т, 2003*) Определите все значения параметра a, при каждом из которых три различных корня уравнения

$$x^3 + (a^2 - 9a)x^2 + 8ax - 64 = 0$$

образуют геометрическую прогрессию. Найдите эти корни.

$a = 7$; корни 2, 4, 8

6. (*ОММО, 2016, 11*) При каких значениях параметра a уравнение

$$x^3 + ax^2 + 13x - 6 = 0$$

имеет единственное решение?

$(-\infty; -8) \cup \left(-\frac{20}{3}; \frac{61}{8}\right)$