

Параллелограмм

Параллелограмм — это четырёхугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны (рис. 1).



Рис. 1. Параллелограмм

Точка пересечения диагоналей параллелограмма называется его *центром*.

Высотой параллелограмма называется перпендикуляр, опущенный из вершины параллелограмма на противоположную сторону (или на её продолжение; рис. 2).



Рис. 2. Высота параллелограмма

Свойства и признаки параллелограмма

СВОЙСТВА ПАРАЛЛЕЛОГРАММА.

1. Противоположные стороны параллелограмма равны.
2. Противоположные углы параллелограмма равны.
3. Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.

ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА.

1. Если в четырёхугольнике противоположные стороны попарно равны, то этот четырёхугольник является параллелограммом.
2. Если в четырёхугольнике противоположные углы попарно равны, то этот четырёхугольник является параллелограммом.
3. Если диагонали четырёхугольника делятся точкой пересечения пополам, то этот четырёхугольник является параллелограммом.
4. Если две стороны четырёхугольника равны и параллельны, то этот четырёхугольник является параллелограммом.

Доказательства свойств и признаков параллелограмма очень просты и предлагаются в виде задач к данному листку.

Прямоугольник

Прямоугольник — это четырёхугольник, у которого все углы прямые. Нетрудно убедиться, что прямоугольник является параллелограммом (почему?).

СВОЙСТВО ПРЯМОУГОЛЬНИКА. Диагонали прямоугольника равны.

ПРИЗНАК ПРЯМОУГОЛЬНИКА. Если в параллелограмме равны диагонали, то этот параллелограмм является прямоугольником.

Ромб

Ромб — это четырёхугольник, у которого все стороны равны (рис. 3). Ясно, что ромб является параллелограммом (почему?).

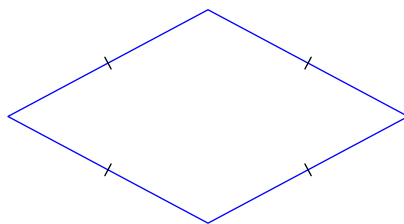


Рис. 3. Ромб

СВОЙСТВА РОМБА.

1. Диагонали ромба перпендикулярны.
2. Диагонали ромба являются биссектрисами его углов.

ПРИЗНАКИ РОМБА.

1. Если в параллелограмме диагонали перпендикулярны, то этот параллелограмм является ромбом.
2. Если диагональ параллелограмма является биссектрисой его угла, то этот параллелограмм — ромб.

Квадрат

Квадрат — это прямоугольник с равными сторонами. Диагонали квадрата равны и перпендикулярны.

Доказательства свойств и признаков прямоугольника, ромба и квадрата также даются в качестве задач к листку.

Задачи

1. Периметр параллелограмма равен 12, а одна из его сторон вдвое больше другой. Найдите стороны параллелограмма.

2 и 4

2. Найдите углы параллелограмма, если один из них на 40° меньше другого.

70° и 110°

3. Докажите свойства параллелограмма: в параллелограмме
- противоположные стороны равны;
 - противоположные углы равны;
 - диагонали делятся точкой пересечения пополам.
4. Докажите признаки параллелограмма: если в четырёхугольнике
- противоположные стороны попарно равны, то это — параллелограмм;
 - противоположные углы попарно равны, то это — параллелограмм;
 - диагонали делятся точкой пересечения пополам, то это — параллелограмм;
 - две стороны равны и параллельны, то это — параллелограмм.
5. Точки M и N — середины сторон BC и AD параллелограмма $ABCD$. Докажите, что четырёхугольник $AMCN$ — параллелограмм.
6. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна a . Из некоторой точки основания проведены прямые, параллельные боковым сторонам. Найдите периметр получившегося четырёхугольника.
- 2a
7. Биссектриса угла параллелограмма делит его сторону на отрезки, равные 2 и 3. Найдите периметр параллелограмма.
- 14 или 16
8. Угол A параллелограмма $ABCD$ равен 30° . Высота BH этого параллелограмма равна 2 и делит сторону AD пополам. Найдите диагональ BD и угол BDA
- 4, 30°
9. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O . Периметр параллелограмма равен 12, а разность периметров треугольников BOC и COD равна 2. Найдите стороны параллелограмма.
- 4, 2, 4, 2
10. Треугольники ABC и ADE имеют общую медиану AM . Докажите, что $BE = DC$.
11. Медиана AM треугольника ABC продолжена за точку M до точки N так, что $MN = AM$. Докажите, что $ABNC$ — параллелограмм.
12. Докажите, что: а) диагонали прямоугольника равны; б) если диагонали параллелограмма равны, то он — прямоугольник.
13. Докажите, что диагонали ромба: а) перпендикулярны; б) являются биссектрисами его углов.
14. Докажите, что: а) параллелограмм с перпендикулярными диагоналями — ромб; б) если диагональ параллелограмма является биссектрисой его угла, то этот параллелограмм — ромб.
15. Докажите, что концы двух различных диаметров окружности являются вершинами прямоугольника.

16. Докажите, что около любого прямоугольника можно описать окружность.
17. Докажите, что в любой ромб можно вписать окружность.
18. Диагонали прямоугольника равны 2. Угол между ними равен 60° . Найдите меньшую сторону прямоугольника.

1

19. Сторона BC параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны AB . Биссектрисы углов A и B пересекают прямую CD в точках E и F , причём $EF = 6$. Найдите стороны параллелограмма.

2, 4, 2, 4

20. Угол A ромба $ABCD$ равен 20° . Из вершины B проведены высоты ромба BM и BN . Найдите углы треугольника BMN .

20, 80, 80

21. Две равные окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B . Отрезок O_1O_2 пересекает эти окружности в точках M и N . Докажите, что четырёхугольники O_1AO_2B и $AMBN$ — ромбы.

22. Докажите, что точки попарного пересечения биссектрис всех четырёх углов параллелограмма являются вершинами прямоугольника.

23. Квадрат вписан в равнобедренный прямоугольный треугольник так, что одна его вершина совпадает с вершиной угла, противоположная ей вершина расположена на гипотенузе, а остальные две вершины — на катетах. Найдите сторону квадрата, если катет треугольника равен 2.

1

24. Две вершины квадрата лежат на гипотенузе равнобедренного прямоугольного треугольника, а две другие — на катетах. Гипотенуза равна 6. Найдите сторону квадрата.

2

25. Вершины прямоугольника расположены на четырёх сторонах квадрата, а стороны прямоугольника параллельны диагоналям квадрата. Найдите периметр прямоугольника, если диагональ квадрата равна 3.

9

26. Вершины M и N равностороннего треугольника BMN лежат соответственно на сторонах AD и CD квадрата $ABCD$. Докажите, что $MN \parallel AC$.

27. Точки K, L, M, N — середины соответственно сторон AB, BC, CD, AD параллелограмма $ABCD$. Докажите, что точки пересечения прямых AL, BM, CN и DK служат вершинами параллелограмма.

28. Докажите, что отрезок, соединяющий середины противоположных сторон параллелограмма, проходит через его центр.

29. Противоположные стороны выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ попарно равны и параллельны. Докажите, что отрезки AD , BE и CF пересекаются в одной точке.

30. На сторонах AB , BC , CD и DA параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки K , L , M и N , делящие стороны в одном и том же отношении (при обходе по часовой стрелке). Докажите, что $KLMN$ — параллелограмм, причём его центр совпадает с центром параллелограмма $ABCD$.

31. Через центр параллелограмма $ABCD$ проведены две прямые. Одна прямая пересекает стороны AB и CD соответственно в точках K и M ; вторая прямая пересекает стороны BC и AD соответственно в точках L и N . Докажите, что четырёхугольник $KLMN$ — параллелограмм.

32. Из вершины D параллелограмма $ABCD$ проведена прямая l , перпендикулярная диагонали AC . Докажите, что перпендикуляры к прямым AB и BC , проведённые через точки A и C соответственно, пересекаются на прямой l .

33. Острый угол ромба равен 30° , сторона ромба равна 4. Найдите расстояние от центра ромба до его стороны.

1

34. В прямоугольнике $ABCD$ наибольшая сторона равна 3, а диагональ AC составляет со стороной AB угол 30° . На сторонах AB и CD взяты точки K и M так, что $AKCM$ — ромб. Найдите сторону ромба.

2

35. Через середину диагонали KM прямоугольника $KLMN$ перпендикулярно ей проведена прямая, пересекающая стороны KL и MN в точках A и B соответственно. Найдите большую сторону прямоугольника, если $AB = BM = 6$.

6

36. Прямая, проходящая через центр прямоугольника перпендикулярно его диагонали, пересекает большую сторону прямоугольника под углом 60° . Отрезок этой прямой, заключённый внутри прямоугольника, равен 2. Найдите большую сторону прямоугольника.

8

37. Окружность, построенная на стороне AD параллелограмма $ABCD$ как на диаметре, проходит через вершину B и середину стороны BC . Найдите острый угол параллелограмма.

09

38. Через центр квадрата проведены две перпендикулярные прямые. Докажите, что точки пересечения этих прямых со сторонами квадрата являются вершинами ещё одного квадрата.

39. На каждой стороне квадрата взято по точке. Эти точки делят стороны квадрата в одном и том же отношении (при обходе по часовой стрелке). Докажите, что выбранные точки также служат вершинами квадрата.

40. Через произвольную точку внутри квадрата проведены две перпендикулярные прямые, каждая из которых пересекает две противоположные стороны квадрата. Докажите, что отрезки этих прямых, заключённые внутри квадрата, равны.

41. Прямая имеет с параллелограммом $ABCD$ единственную общую точку B . Вершины A и C удалены от этой прямой на расстояния a и b соответственно. На какое расстояние удалена от этой прямой вершина D ?

$$q + v$$

42. Стороны параллелограмма равны a и b . Найдите диагонали четырёхугольника, образованного пересечениями биссектрис: а) внутренних углов параллелограмма; б) внешних углов параллелограмма.

$$q + v \quad (q \neq |q - v|) \quad (v)$$

43. Дан прямоугольник, не являющийся квадратом. Докажите, что при пересечении биссектрис всех четырёх его углов образуется квадрат.

44. Через точку, расположенную внутри треугольника, проведены прямые, параллельные сторонам треугольника. Эти прямые разбивают треугольник на три треугольника и три четырёхугольника. Пусть a , b , c — параллельные высоты трёх полученных треугольников. Найдите параллельную им высоту исходного треугольника.

$$c + q + v$$

45. Докажите, что в равнобедренном треугольнике сумма расстояний от произвольной точки основания до боковых сторон постоянна.

46. Через каждую вершину параллелограмма проведена прямая, перпендикулярная диагонали, не проходящей через эту вершину. Докажите, что диагонали четырёхугольника, образованного пересечениями четырёх проведённых прямых, перпендикулярны сторонам параллелограмма.

47. Окружность, построенная на стороне BC треугольника ABC как на диаметре, пересекает стороны AB и AC в точках M и N соответственно. Отрезки CM и BN пересекаются в точке P . Докажите, что $AP \perp BC$.

48. Три равных окружности проходят через одну точку и попарно пересекаются в трёх других точках A , B и C . Докажите, что треугольник ABC равен треугольнику с вершинами в центрах окружностей.

49. Угол A ромба $ABCD$ равен 60° . На сторонах AB и BC взяты соответственно точки M и N так, что $AM = BN$. Докажите, что треугольник DMN равносторонний.

50. На сторонах параллелограмма вне его построены квадраты. Докажите, что их центры являются вершинами квадрата.

51. В прямоугольнике $ABCD$ точка M — середина стороны BC , точка N — середина стороны CD . Отрезки DM и BN пересекаются в точке P . Докажите, что $\angle MAN = \angle BPM$.

52. Докажите, что прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке.

53. Дан треугольник ABC и окружность S , описанная около него. Докажите, что середина стороны BC лежит на отрезке, соединяющем точку пересечения высот с точкой окружности S , диаметрально противоположной вершине A , и делит этот отрезок пополам.

54. Сторона BC параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны AB . Точка P — проекция вершины C на прямую AB , точка M — середина AD . Докажите, что $\angle DMP = 3\angle APM$.